

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT
Matematică M_mate-info, noiembrie 2023
Clasa a XII-a Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

Subiectul I

(30 puncte)

- 5p** 1. Calculați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = \sqrt{3}$ și $b_2 = 9$.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe dreapta $y = x$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2^{x^2} = 4 \cdot 2^x$.
- 5p** 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A , știind că mulțimea A are exact 16 submulțimi cu cel mult două elemente.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC cu $AB = 12$, $AC = 16$ și $m(\widehat{A}) = 90^\circ$. Calculați lungimea vectorului $\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC}$.
- 5p** 6. Aflați numerele reale $x \in [0; \pi]$ pentru care $\sin 2x = \sin x$.

Subiectul al II-lea

(30 puncte)

1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} a & a+2 & a+3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}$, unde $a \in \mathbb{R}$.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(3)) = 8$.
- 5p** b) Determinați numărul real a pentru care matricea $A(a)$ este inversabilă.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $A(a) \cdot A(1) = A(1) \cdot A(a)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x^2 y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 12$.
- 5p** a) Arătați că $\sqrt{3} \circ \sqrt{5} = 3$
- 5p** b) Arătați că $x \circ y = (x^2 - 3)(y^2 - 3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.
- 5p** c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi pentru care $m \circ n = 4$.

Subiectul al III-lea

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + x}{x - 2}$
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x - 2)^2}$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Arătați că graficul funcției f admite 2 puncte de extrem $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ și calculați $f(x_1) + f(x_2)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 2}{x}, & \text{dacă } x < 1 \\ 2\ln x - 1, & \text{dacă } x \geq 1 \end{cases}$.
- 5p** a) Calculați $\int \frac{x^2 - 2}{x} dx$, $x \in (0, 1)$
- 5p** b) Demonstrați că funcția f admite primitive.
- 5p** c) Determinați o primitivă F a funcției f pe intervalul $(0, +\infty)$.

Examenul de bacalaureat național 2023

Proba E. c)

Matematică M_mate-info

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE simulare noiembrie 2023

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I

(30 puncte)

1.	$q = \frac{b_2}{b_1} = \frac{9}{\sqrt{3}} = 3\sqrt{3}$ $\Rightarrow b_4 = b_2 \cdot q^2 = 9 \cdot (3\sqrt{3})^2 = 243$	3p 2p
2.	$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{-2}{2} = 1$ $y_v = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4-4m}{4} = -1+m$ $x_v = y_v \Leftrightarrow m = 2$	3p 2p
3.	$2^{x^2} = 4 \cdot 2^x \Leftrightarrow 2^{x^2} = 2^{x+2}$ $x^2 = x+2 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2 \text{ și } x_2 = -1$	2p 3p
4.	$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 = 16$ $1 + n + \frac{n(n-1)}{2} = 16 \Leftrightarrow n = 5$	2p 3p
5.	$\vec{u} = \vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD} \text{ unde } ABDC \text{ este paralelogram.}$ $\text{Cum } m(\angle A) = 90^\circ \Rightarrow ABDC \text{ este dreptunghi } \Rightarrow AD = BC = 20$	2p 3p
6.	$2 \cdot \sin x \cdot \cos x = \sin x \Leftrightarrow \sin x(2 \cos x - 1) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \text{ sau } \cos x = \frac{1}{2}.$ $\text{Cum } x \in [0; \pi] \text{ obținem } x = 0, x = \pi \text{ și } x = \frac{\pi}{3}$	3p 2p

Subiectul al II-lea

(30 puncte)

1a	$A(3) = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(3)) = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ $= 27 + 6 + 20 - 18 - 12 - 15 = 8.$	2p 3p
1b	$\det(A(a)) = 2(a - 1)^2$, pentru orice număr real a Matricea $A(a)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(a)) \neq 0 \Leftrightarrow a \neq 1$, deci $a \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$.	2p 3p
1c	$A(a) \cdot A(1) = \begin{pmatrix} 3a + 5 & 7a + 9 & 9a + 11 \\ 8 & 16 & 20 \\ a + 2 & a + 6 & a + 8 \end{pmatrix}$ $A(1) \cdot A(a) = \begin{pmatrix} a + 7 & a + 15 & 5a + 15 \\ a + 7 & a + 15 & 5a + 15 \\ a + 2 & a + 6 & 2a + 7 \end{pmatrix}$ Din $A(a) \cdot A(1) = A(1) \cdot A(a)$ se obține $a=1$.	2p 3p
2a	$\sqrt{3} \circ \sqrt{5} = \sqrt{3}^2 \cdot \sqrt{5}^2 - 3 \cdot \sqrt{3}^2 - 3 \cdot \sqrt{5}^2 + 12$ $= 15 - 9 - 15 + 12 = 3.$	2p 3p
2b	$x \circ y = x^2 y^2 - 3x^2 - 3y^2 + 9 + 3$ $= x^2(y^2 - 3) - 3(y^2 - 3) + 3 = (x^2 - 3)(y^2 - 3) + 3$ pentru orice numere reale x și y .	2p 3p
2c	$m \circ n = 4 \Leftrightarrow (m^2 - 3)(n^2 - 3) + 3 = 4 \Leftrightarrow (m^2 - 3)(n^2 - 3) = 1$ $m \text{ și } n \text{ sunt numere întregi, } m^2 - 3 = n^2 - 3 = -1 \text{ sau } m^2 - 3 = n^2 - 3 = 1$ $\text{deci } m^2 = n^2 = 2 \text{ sau } m^2 = n^2 = 4,$ $\text{de unde se obțin perechile de numere întregi } (-2, -2), (-2, 2), (2, -2), (2, 2).$	2p 3p

Subiectul al III-lea

(30 puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x + 1) \cdot (x - 2) - (x^2 + x) \cdot 1}{(x - 2)^2}$ $f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x - 2)^2}.$	3p 2p
1.b)	$m = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{x^2 + x}{x - 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x}{x(x - 2)} = 1$	2p

	$n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + x}{x - 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{3x}{x - 2} \right) = 3$ <p>Dreapta de ecuație $y = x + 3$ asimptota oblică spre $-\infty$</p>	<p>2p</p> <p>1p</p>
1.c)	$f'(x) = \frac{x^2 - 4x - 2}{(x - 2)^2}$ <p>Ecuția $f'(x) = 0$ are 2 soluții. $x_{1,2} = 2 \pm \sqrt{6}$.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.a)	$f(x_1) + f(x_2) = 10$ $\int \frac{x^2 - 2}{x} dx = \int \left(\frac{x^2}{x} - \frac{2}{x} \right) dx =$ $\int \left(x - \frac{2}{x} \right) dx = \int x dx - 2 \int \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} - 2 \ln x + C, x \in (0, 1)$	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.b)	<p>Funcția f este continuă pe $(0, 1) \cup (1, +\infty)$.</p> $\lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) = \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) = f(1) =$ <p>-1, rezultă f este continuă pe $(0, +\infty)$, deci admite primitive.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2.c)	$F(x) = \frac{x^2}{2} - 2 \ln x + C_1, x \in (0, 1)$ și $F(x) = x(2 \ln x - 3) + C_2, x \in [1, +\infty)$. <p>F trebuie să fie continuă în 1, obținem $\frac{1}{2} + C_1 = -3 + C_2$, deci $C_2 = C_1 + \frac{7}{2}$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>