

Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\sqrt{7}(1+2\sqrt{7})-\sqrt{7}=14$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-3x+5$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=mx+1$. Determinați numărul real m pentru care $f(2)=g(2)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{7x-12}=x$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă suma cifrelor egală cu 9.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,-1)$, $B(3,5)$. Determinați distanța de la punctul O la punctul M , unde M este mijlocul segmentului AB .
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A cu $BC=6$ și $AB=3$. Calculați aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}$ și $I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A=-5$.
- 5p b) Demonstrați că $A\cdot A-2A-5I_2=O_2$, unde $O_2=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $\det(A-xI_2)=10$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=x+y+\frac{xy}{3}$.
- 5p a) Arătați că $2\circ(-3)=-3$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Determinați numerele reale x pentru care $x\circ(x-3)\geq-3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=(x-3)e^x$.
- 5p a) Arătați că $f'(x)=(x-2)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.
- 5p b) Calculați $\lim_{x\rightarrow 2}\frac{f'(x)}{e^x-e^2}$.
- 5p c) Arătați că $(3-x)e^{x-2}\leq 1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.
2. Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2e^x$ și $g:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $g(x)=x(x+2)e^x$.
- 5p a) Calculați $\int\frac{g(x)}{f(x)}dx$, $x\in(0,+\infty)$.
- 5p b) Demonstrați că funcția f este o primitivă a funcției g .
- 5p c) Determinați primitiva $H:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ a funcției $h:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $h(x)=g(x)-f(x)$, știind că $H(1)=3$.

Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I
(30 de puncte)

1.	$\sqrt{7}(1+2\sqrt{7}) - \sqrt{7} = \sqrt{7} + 2\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} - \sqrt{7} = \sqrt{7} + 14 - \sqrt{7} = 14$ este număr natural.	3p 2p
2.	$f(2) = 3, g(2) = 2m + 1$ $f(2) = g(2) \Rightarrow 2m + 1 = 3 \Rightarrow 2m = 2 \Rightarrow m = 1$	2p 3p
3.	$7x - 12 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = 0$ $x = 4$ sau $x = 3$ care convin.	2p 3p
4.	$\overline{ab} \in \{10, 11, \dots, 99\} \Rightarrow$ Numărul cazurilor posibile este 90 $a + b = 9 \Rightarrow \overline{ab} \in \{18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, 81, 90\} \Rightarrow$ Numărul cazurilor favorabile este 9 $\Rightarrow P = \frac{\text{număr cazuri favorabile}}{\text{număr cazuri posibile}} = \frac{1}{10}$	2p 2p 1p
5.	M , mijlocul segmentului AB , are coordonatele $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2, y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \Rightarrow M(2, 2)$ $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (2 - 0)^2} \Rightarrow OM = 2\sqrt{2}$.	2p 3p
6.	$AC^2 = BC^2 - AB^2 = 36 - 9 = 27 \Rightarrow AC = 3\sqrt{3}$ $A_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} = \frac{3 \cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea
(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ -5 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 2 \cdot (-5) = -15 + 10 = -5$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -10 & -1 \end{pmatrix}$ $A \cdot A - 2A - 5I_2 = \begin{pmatrix} 15 & 4 \\ -10 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 & 4 \\ -10 & -6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	3p 2p
c)	$A - xI_2 = \begin{pmatrix} 5-x & 2 \\ -5 & -3-x \end{pmatrix}$	2p

	$\det(A - xI_2) = 10 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 5-x & 2 \\ -5 & -3-x \end{vmatrix} = 10 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 15 = 0 \Leftrightarrow x = 5 \text{ sau } x = -3$	3p
2.a)	$2 \circ (-3) = 2 - 3 + \frac{2 \cdot (-3)}{3} = 2 - 3 - 2 = -3$	3p 2p
b)	$x \circ e = x + e + \frac{xe}{3} = e + x + \frac{ex}{3} = e \circ x$, oricare ar fi $x \in \mathbb{R}$ $x \circ e = x \Leftrightarrow x + e + \frac{xe}{3} = x \Leftrightarrow e \left(1 + \frac{x}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow e = 0$, deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	2p 3p
c)	$x \circ (x - 3) \geq -3 \Leftrightarrow 2x - 3 + \frac{x^2 - 3x}{3} \geq -3 \Leftrightarrow x^2 + 3x \geq 0$ $x_1 = -3, x_2 = 0 \Rightarrow x \in (-\infty, -3] \cup [0, +\infty)$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x + (x-3)e^x = (1+x-3)e^x = (x-2)e^x, x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x)}{e^x - e^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)e^x}{e^x - e^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-1)e^x}{e^x} = 1$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, 2] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 2]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [2, \infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[2, \infty)$ $f(x) \geq f(2) \Leftrightarrow (x-3)e^x \geq -e^2$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, de unde obținem $(x-3)e^{x-2} \geq -1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $(3-x)e^{x-2} \leq 1$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.	2p 3p
2.a)	$\int \frac{g(x)}{f(x)} dx = \int \frac{x(x+2)e^x}{x^2 e^x} dx = \int \frac{x+2}{x} dx = \int \left(1 + \frac{2}{x}\right) dx = \int 1 dx + \int \frac{2}{x} dx = x + 2 \ln x + C, x \in (0, +\infty)$	2p 3p
b)	f derivabilă, $f'(x) = (x^2)' e^x + x^2 (e^x)' = 2xe^x + x^2 e^x = x(x+2)e^x$ $f'(x) = g(x) \Rightarrow f$ este o primitivă a funcției g .	3p 2p
c)	$H(x) = \int (g(x) - f(x)) dx = 2 \int xe^x dx = 2(x-1)e^x + k$ Din $H(1) = 3 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow H(x) = 2(x-1)e^x + 3$.	3p 2p