

Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024

Proba E. c)

Matematică *M_{șt-nat}*

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\bar{z} = 9 + 4i$, $\bar{z}$ este conjugatul lui z . Arătați că modulul numărului z este egal cu 5.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = mx + 1$. Determinați numărul real m pentru care $(g \circ f)(2) = 4$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} + 2 \cdot 3^{x+1} - 4 \cdot 3^x = 99$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă cifra sutelor egală cu cifra unităților.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,3)$ și $B(5,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului AB .
- 5p 6. Arătați că $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) + \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = I_2 + xA$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(M(1)) = -2$.
- 5p b) Demonstrați că $M(x) \cdot M(y) = M(x + y - 3xy)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Arătați că **nu** există numere întregi impare x și y , astfel încât $M(x) \cdot M(y) = M(2024)$.
2. Pe mulțimea $M = (0, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x \circ y = x^{\ln \sqrt[3]{y}}$.
- 5p a) Arătați că $2 \circ 1 = 1$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $x \circ x = e^3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 - x + 1}{x - 1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $f(e) < \frac{7}{2}$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Demonstrați că funcția $F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \ln \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x}$ este o primitivă a funcției f .

5p b) Calculați $\int \frac{1}{f(x)} dx$, $x \in (0, +\infty)$.

5p c) Determinați primitiva $H : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ a funcției $h : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $h(x) = f^2(x)$, știind că $H(1) = 1$.

Simulare, Bacalaureat, ianuarie 2024
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z = x + yi$, unde $x, y \in \mathbb{R} \Rightarrow 3x - yi = 9 + 4i \Rightarrow z = 3 - 4i$ $ z = 5$	3p 2p
2.	$f(2) = 3$ $g(f(2)) = 4 \Rightarrow g(3) = 4 \Rightarrow 3m + 1 = 4 \Rightarrow m = 1$	2p 3p
3.	$3^x(9 + 6 - 4) = 99$ $3^x = 9 \Rightarrow x = 2$	3p 2p
4.	$\overline{abc} \in \{100, 101, \dots, 999\} \Rightarrow$ Numărul cazurilor posibile este 900 $a = c \in \{1, 2, \dots, 9\} \Rightarrow$ 9 valori, iar b poate avea 10 valori. Numărul cazurilor favorabile este $9 \cdot 10 = 90 \Rightarrow P = \frac{1}{10}$	2p 3p
5.	M , mijlocul segmentului AB , are coordonatele $x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = 2$, $y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = 2 \Rightarrow M(2, 2)$ $m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = -\frac{1}{3}$. Fie d mediatoarea segmentului $AB \Rightarrow M \in d, m_d = -\frac{1}{m_{AB}} = 3$, $\Rightarrow d : y - 2 = 3(x - 2) \Rightarrow d : 3x - y - 4 = 0$	2p 3p
6.	$\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right)$ $\cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) \cdot \cos\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \sin\left(\frac{\pi}{3} - x\right) \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x + \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3} - x\right) =$ $= \cos \frac{\pi}{2} = 0$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$M(1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\det(M(1)) = -3 \cdot 2 - 2 \cdot (-2) = -2$	2p 3p
b)	$M(x) \cdot M(y) = I_2 + (x + y)A + xyA \cdot A$ $A \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & -6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} = -3A \Rightarrow M(x) \cdot M(y) = M(x + y - 3xy)$	2p 3p

c)	$M(x + y - 3xy) = M(2024) \Rightarrow x + y - 3xy = 2024$	2p
	Dacă $x = 2k + 1$ și $y = 2p + 1$ unde $k, p \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ $2k + 1 + 2p + 1 - 3(2k + 1)(2p + 1) = 2024 \Rightarrow -4(k + p + 3kp) = 2025$ contradicție	3p
2.a)	$2 \circ 1 = 2^{\ln \sqrt[3]{1}} = 2^{\ln 1} =$ $= 2^0 = 1$	3p 2p
b)	$x \circ E = x^{\ln \sqrt[3]{E}} = x^{\frac{1}{3} \ln E} = E^{\ln \sqrt[3]{x}} = E^{\frac{1}{3} \ln x} = E \circ x$, pentru orice $x \in (0, \infty)$	2p
	$x \circ E = x \Rightarrow \left(\frac{1}{3} \ln E - 1 \right) \ln x = 0 \Rightarrow \ln E = 3$, pentru orice $x \in (0, \infty)$, deci $E = e^3 \in (0, +\infty)$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”	3p
c)	$x \circ x = e^3 \Rightarrow x^{\ln \sqrt[3]{x}} = e^3 \Rightarrow \frac{1}{3} \ln^2 x = 3 \Rightarrow$	2p
	$\Rightarrow \ln x = 3 \Rightarrow x_1 = e^3, \Rightarrow \ln x = -3 \Rightarrow x_2 = \frac{1}{e^3}$ care convin.	3p

SUBIECTUL al III-lea
(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x-1)(x-1) - (x^2-x+1) \cdot 1}{(x-1)^2} =$	2p
	$\frac{2x^2 - 2x - x + 1 - x^2 + x - 1}{(x-1)^2} = \frac{x^2 - 2x}{(x-1)^2} = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$, oricare ar fi $x \in (1, \infty)$	3p
b)	$m = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{x^2 - x} = 1$	2p
	$n = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x-1} = 0 \Rightarrow y = x$ este ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .	3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$	3p
	f este descrescătoare pe $(1, 2]$ și f crescătoare pe $[2, \infty)$ $2 < e < 3$ și f crescătoare pe $[2, \infty) \Rightarrow f(e) < f(3) \Rightarrow f(e) < \frac{7}{2}$	2p
2.a)	F derivabilă, $F'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}-1} \cdot \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - \sqrt{x^2+1} + 1}{x^2} =$	2p
	$= \frac{1}{x(\sqrt{x^2+1}-1)} \cdot \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{x\sqrt{x^2+1}} = f(x) \Rightarrow F$ este o primitivă a funcției f	3p
b)	$\int \frac{1}{f(x)} dx = \int x\sqrt{x^2+1} dx = \frac{1}{2} \int \sqrt{x^2+1} \cdot (x^2+1)' dx =$	2p
	$= \frac{1}{3} \sqrt{(x^2+1)^3} = \frac{1}{3} (x^2+1) \sqrt{x^2+1} + C$	3p

c)	$\int f^2(x)dx = \int \frac{1}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{x^2+1-x^2}{x^2(x^2+1)}dx = \int \frac{1}{x^2}dx - \int \frac{1}{x^2+1}dx = -\frac{1}{x} - \arctg x$	3p
	$H(x) = -\frac{1}{x} - \arctg x + k, H(1) = 1 \Rightarrow k = 2 + \frac{\pi}{4} \Rightarrow H(x) = -\frac{1}{x} - \arctg x + 2 + \frac{\pi}{4}$	2p