INSPECTORATUL ȘCOLAR JUDEȚEAN ILFOV

MINISTERUL EDUCAȚIEI

SIMULARE EXAMEN BACALAUREAT

Matematică M_șt_nat, ianuarie 2023

Clasa a XII-a

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I *(30 de puncte)*

5p 1. Să se calculeze 23+21+19+…+9+7.

5p 2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2+ax-4$. Știind că punctul $A(-2;1)$ aparține graficului funcției, calculați $f(a)$.

5p 3. Să se rezolve, în mulțimea numerelor reale, ecuația $\sqrt[3]{x-1}=1-x$.

5p 4. Calculați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de trei cifre, acesta să aibă toate cifrele pare.

5p 5. În reperul cartezian *xOy* se consideră punctele A(1,1) si $B(2,-1)$. Determinați coordonatele punctului C de pe axa *Ox* pentru care $AC\perp AB$.

5p 6. Fia ABC un triunghi cu $AB=AC=\frac{BC}{\sqrt{2}}$. Calculați sinB.

Subiectul al II-lea *(30 de puncte)*

1. Se consideră matricele $A=\begin{pmatrix}4 & -4\\ 1 & -1\end{pmatrix}, B(x,y)=\begin{pmatrix}x & y\\ 4 & -4\end{pmatrix}, unde\ x,y\in\mathbb{R}$.

5p ***a)*** Arătați că $A\cdot A=3\cdot A$.

5p ***b)*** Arătați că $det\left(4\cdot A-B(x,y)\right)=0$ pentru orice numere reale x și y.

5p ***c)*** Determinați numerele reale x și y pentru care $A\cdot B(x,y)=B(x,y)\cdot A$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x\circ y=xy-7(x+y)$.

5p ***a)*** Arătați că $2\circ(-2)=-4$.

5p ***b)*** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $2\circ\sqrt[3]{x}=-9$.

5p ***c)*** Determinați n$\in\mathbb{N}$ pentru care $(n\circ n)\circ n\geq n^3$.

SUBIECTUL al III-lea *(30 de puncte)*

1. Se consideră funcția $f:(0;\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x+1}$.

5p ***a)*** Să se arate că $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x(x+1)^2}$.

5p ***b)*** Să se determine punctele de pe graficul funcției f în care tangenta la grafic este paralelă la axa Ox .

5p ***c)*** Să se arate că $\ln x\geq\frac{2(x-1)}{x+1}$, oricare ar fi $x\geq 1$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^3+3x}{x^2+1}$.

5p ***a)*** Aratați că $\int_0^1(x^2+1)\cdot f(x)dx=\frac{7}{4}$;

5p ***b)*** Calculați $\int_0^1 f(x)dx$;

5p ***c)*** Aratați că $\int_0^1\frac{e^x(x^2+1)}{x}\cdot f(x)dx=4e-5$.

Examenul de bacalaureat naţional 2023
Proba E. c)
Matematică M_șt-nat
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE simulare ianuarie 2023

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.

• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I ***30 de puncte***

1	(a_n) *progresie aritmetică cu* $a_1 = 23$ $r = -2$ *și* $a_n = 7$ $a_n = a_1 + (n-1)r, n = 9\ .S_n = 135$	**2p** **3p**
2	$A(-2,1) \in Gf \Rightarrow f(-2) = 1 \Rightarrow a = -\frac{1}{2}$ $f(a) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{7}{2}$	**3p** **2p**
3	$\sqrt[3]{\boldsymbol{x}-1} = 1 - \boldsymbol{x} \Rightarrow (\boldsymbol{x}-1)^3 = 1 - \boldsymbol{x} \Rightarrow (\boldsymbol{x}-1)(\boldsymbol{x}^2 - 2\boldsymbol{x} + 2) = 0$ $x_1 = 1$ *și* $x_2, x_3 \notin \mathbb{R}$	**2p** **3p**
4	$p = \frac{nr.\,cazuri\ favorabile}{nr.\,cazuri\ posibile}$, $nr.\,cazuri\ posibile = 900$ $\overline{abc}$ *cu cifre pare* $\Rightarrow a \in \{2,4,6,8\}$ *și* $b, c \in \{0,2,4,6,8\}, nr.\,cazuri\ favorabile = 4 \cdot 5 \cdot 5 = 100 \Rightarrow p = \frac{1}{9}$	**2p** **3p**
5	$\mathrm{C} \in \mathrm{Ox} \Rightarrow \mathrm{C}(\mathrm{x}, 0); AC \perp AB \Rightarrow m_{AC} \cdot m_{AB} = -1$ $m_{AC} = 1 - x, m_{AB} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x = -1$	**2p** **3p**
6	$AB = AC = x, BC = x\sqrt{2}, AD \perp BC \Rightarrow BD = \frac{x\sqrt{2}}{2}$ $\cos B = \frac{BD}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Longrightarrow sinB = \frac{\sqrt{2}}{2}$.	**2p** **3p**

Subiectul al II-lea ***(30 puncte)***

1a	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & -12 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} =$ $= 3 \cdot \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 3 \cdot A$	**3p** **2p**
1b	$4 \cdot A - B(x,y) = \begin{pmatrix} 16 & -16 \\ 4 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x & y \\ 4 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-x & -16-y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\det(4 \cdot A - B(x,y)) = \begin{vmatrix} 16-x & -16-y \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$	**3p** **2p**

1c	$A\cdot B(x,y)=\begin{pmatrix}4x-16 & 4y+16\\ x-4 & y+4\end{pmatrix};\ B(x,y)\cdot A=\begin{pmatrix}4x+y & -4x-y\\ 12 & -12\end{pmatrix}$ $A\cdot B(x,y)=B(x,y)\cdot A \Leftrightarrow 4x-16=4x+y, 4y+16=-4x-y, x-4=12, y+4=-12 \Leftrightarrow x=16$ și $y=-16$.	**2p** **3p**
2a	$2\circ(-2)=2\cdot(-2)-7(2-2)=$ $=-4-7\cdot 0=-4$	**3p** **2p**
2b	$2\circ\sqrt[3]{x}=2\sqrt[3]{x}-7(2+\sqrt[3]{x})=-5\sqrt[3]{x}-14$ $-5\sqrt[3]{x}-14=-9 \Leftrightarrow \sqrt[3]{x}=-1 \Leftrightarrow x=-1$	**2p** **3p**
2c	$(n\circ n)\circ n=(n^2-14n)\circ n=n^3-21n^2+91n$ $n^3-21n^2+91n\geq n^3 \Leftrightarrow 3n^2-13n\leq 0 \Leftrightarrow n\in\left[0,\frac{13}{3}\right]$ și $n\in\mathbb{N}$, deci $n\in\{0,1,2,3\}$	**2p** **3p**

Subiectul al III-lea ***30 puncte***

1.a)	$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{4}{(x+1)^2}$ Finalizare	**2p** **3p**
b)	Din ecuația tangentei și condiția de paralelism cu axa Ox, avem $\boldsymbol{f'(x)}=0$ x = 1 și P(1;0)	**3p** **2p**
c)	Din punctul (a) se obtine ca $\boldsymbol{f'(x)}\geq 0, (\forall)x\in(0;\infty)$ și f este crescătoare pe $(0;+\infty)$ $f(x)\geq f(1)=0$, pentru orice $x\in[1,\infty)$, finalizare	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^1 (x^2+1)\cdot f(x)dx=\int_0^1 (x^2+1)\cdot\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=$ $\int_0^1 (x^3+3x)dx=\left(\frac{x^4}{4}+\frac{3x^2}{2}\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{4}+\frac{3}{2}=\frac{7}{4}$	**2p** **3p**
b)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_0^1 (x+\frac{2x}{x^2+1})dx$ $=\left(\frac{x^2}{2}+\ln(x^2+1)\right)\Big\vert_0^1=\frac{1}{2}+ln2$	**2p** **3p**
c)	$\int_0^1\frac{e^x(x^2+1)}{x}f(x)dx=\int_0^1\frac{e^x(x^2+1)}{x}\cdot\frac{x^3+3x}{x^2+1}dx=\int_0^1 e^x(x^2+3)dx=(x^2+3)e^x\vert_0^1-\int_0^1 2xe^x dx=$ $=4e-3-(2xe^x\vert_0^1-2e^x\vert_0^1)\ =4e-3-(2e-2e+2)=4e-5$	**2p** **3p**