Examenul de bacalaureat naţional 2023
Proba E. c)
Matematică Mate-info
Clasa a XII-a Simulare Ianuarie

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
• Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I *(30 puncte)*

5p 1. Calculați suma primilor 10 termeni ai unei progresii aritmetice $(a_n)_{n\geq1}$, dacă $a_2+a_3=8$ și $a_2+a_5=12$.

5p 2. Se consideră funcțiile $f:R\to R,\ f(x)=x^2-x+1$ și $g:R\to R, g(x)=4x-5$. Determinați coordonatele punctelor de intersecție a graficele celor două funcții.

5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x^2-4)=\log_3(6x-12)$.

5p 4. Determinați probabilitatea ca alegând un număr din mulțimea $M=\{1,2,3,...,2023\}$, acesta să fie divizibil cu 5 și să **nu** fie divizibil cu 10.

5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BM}$. Arătați că $\overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$.

5p 6. Fie $\alpha\in R$ cu proprietatea că $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4}$. Calculați $\sin2\alpha$.

Subiectul al II-lea *(30 puncte)*

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1 & 3x & 0\\ 0 & 5x+1 & 0\\ 0 & 2x & 1\end{pmatrix}$, unde $x\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Arătați că $det(A(1))=6$.

5p **b)** Arătați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y+5xy)$ pentru orice numere reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale x , $x\neq-\frac{1}{5}$, pentru care matricea A(x) este egală cu inversa ei.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=5xy-15x-15y+48$.

5p **a)** Arătați că $x\circ y=5(x-3)(y-3)+3$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Arătați că $e=\frac{16}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție" $\circ$ ".

5p **c)** Determinați $x\in\mathbb{R}$ pentru care $x\circ x\circ x=x$.

Subiectul al III-lea*(30 puncte)*

1. Se consideră funcția $f:[0,+\infty)\to R,\ f(x)=1-\dfrac{2\cdot e^x}{x+e^x}$.

5p **a)** Verificați că $f'(x)=\dfrac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei orizontale către $+\infty$ la graficul funcției f .

5p **c)** Arătați că $-1\le f(x)\le\dfrac{1-e}{1+e},\ (\forall)x\ge 0$.

2. Pentru orice număr natural nenul n se consideră $I_n=\int_0^1\dfrac{x^n}{x+1}dx$.

5p **a)** Calculați I_1.

5p **b)** Arătați că $I_{n+1}+I_n=\dfrac{1}{n+1}$, oricare ar fi $n\in N^*$.

5p **c)** Demonstrați că $\dfrac{1}{2}\le 2023\cdot I_{2022}\le 1$.

Examenul de bacalaureatnaţional 2023

Proba E. c)
Matematică M mate-info
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE Simulare Ianuarie

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
• Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
• Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
• Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I *(30 puncte)*

1	$\begin{cases} a_2+a_3=8 \\ a_2+a_5=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1+3r=8 \\ 2a_1+5r=12 \end{cases} \Leftrightarrow r=2, a_1=1$ $a_{10}=a_1+9r \Leftrightarrow a_{10}=19$ $S_{10}=\frac{(a_1+a_{10})\cdot 10}{2}=\frac{(1+19)\cdot 10}{2}=100$	3p 2p
2	$G_f \cap G_g : f(x)=g(x) \Leftrightarrow x^2-x+1=4x-5 \Leftrightarrow x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow x_1=2, x_2=3$ Pt. $x=2 \Rightarrow y=3 \Rightarrow A(2,3)$, iar pt $x=3 \Rightarrow y=7 \Rightarrow B(3,7)$ $\Rightarrow G_f \cap G_g=\{A(2,3);B(3,7)\}$	3p 2p
3	$CE:\begin{cases} x^2-4>0 \\ 6x-12>0 \end{cases}$, ecuația este echivalentă cu $x^2-4=6x-12 \Leftrightarrow x^2-6x+8=0$ $x_1=2$, care nu verifică *CE*, $x_2=4$,care verifică *CE*, deci soluția ecuației este $x=4$	2p 3p
4	$\begin{cases} n \vdots 5 \\ n \in M \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n=5k, k\in N^* \\ 1\le 5k \le 2023 \end{cases} \Leftrightarrow k\in\{1,2,...,404\}$, deci sunt 404 numere din *M* divizibile cu 5. Dintre acestea, 202 numere sunt pare, deci divizibile cu 10 $\Rightarrow$ sunt 202 numere din *M* divizibile cu 5 și nu cu 10. Deci sunt 202 cazuri favorabile. $\lvert M\rvert=2023$, deci sunt 2023 cazuri posibile $\Rightarrow P=\frac{\text{numar cazuri favorabile}}{\text{numar cazuri posibile}}=\frac{202}{2023}$	3p 2p
5	$\overrightarrow{CM}=2\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CM}+\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{BM}+\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow \overrightarrow{CB}=\overrightarrow{BM}$ deci *B* este mijlocul segmentului $[CM]$ $\Rightarrow \overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC}) \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}=2\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$	3p 2p
6	$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \sin\alpha\cdot\cos\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\alpha=\frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{4}$ $\Leftrightarrow \sin\alpha-\cos\alpha=\frac{1}{2}$; ridicăm la pătrat și obținem $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=\frac{1}{4} \Leftrightarrow$ $\sin 2\alpha=1-\frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin 2\alpha=\frac{3}{4}$	2p 3p

Subiectul al II-lea *(30 puncte)*

1a	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ $= 6 + 0 + 0 - 0 - 0 - 0 = 6$	**2p** **3p**
1b	$\mathrm{A(x)} \cdot \mathrm{A(y)} = \begin{pmatrix} 1 & 3x & 0 \\ 0 & 5x+1 & 0 \\ 0 & 2x & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3y & 0 \\ 0 & 5y+1 & 0 \\ 0 & 2y & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 3x+3y+15xy & 0 \\ 0 & 5x+5y+25xy+1 & 0 \\ 0 & 2x+2y+10xy & 1 \end{pmatrix}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 3(x+y+5xy) & 0 \\ 0 & 5(x+y+5xy)+1 & 0 \\ 0 & 2(x+y+5xy) & 1 \end{pmatrix} = A(x+y+5xy).$	**3p** **2p**
1c	$A(x) \cdot A^{-1}(x) = I_3$ și $A^{-1}(x) = A(x) \Rightarrow A(x) \cdot A(x) = I_3 \Rightarrow$ $A(2x+5x^2) = A(0) \Rightarrow 2x + 5x^2 = 0$ $x_1 = 0$ și $x_2 = -\frac{2}{5}$	**3p** **2p**
2a	$x \circ y = 5xy - 15x - 15y + 45 + 3$ $= 5x(y-3) - 15(y-3) + 3 = 5(x-3)(y-3) + 3$ pentru orice numere reale x și y.	**2p** **3p**
2b	$x \circ \frac{16}{5} = 5(x-3)\left(\frac{16}{5} - 3\right) + 3 = 5(x-3)\frac{1}{5} + 3 = x - 3 + 3 = x, x \in \mathbb{R}$ $\frac{16}{5} \circ x = 5\left(\frac{16}{5} - 3\right)(x-3) + 3 = 5 \cdot \frac{1}{5}(x-3) + 3 = x - 3 + 3 = x, x \in \mathbb{R},$ deci e= $\frac{16}{5}$ este elementul neutru al legii de compoziție” $\circ$ ”.	**2p** **3p**
2c	$x \circ x = 5(x-3)(x-3) + 3 = 5(x-3)^2 + 3 \Rightarrow x \circ x \circ x = 25(x-3)^3 + 3$ $25(x-3)^3 = x - 3 \Leftrightarrow x = 3$ sau $x = \frac{14}{5}$ sau $x = \frac{16}{5}$	**2p** **3p**

Subiectul al III-lea *(30 puncte)*

1a	$f'(x)=\left(1-\frac{2e^x}{x+e^x}\right)'=1'-\left(\frac{2e^x}{x+e^x}\right)'=0-\frac{\left(2e^x\right)'\left(x+e^x\right)-2e^x\left(x+e^x\right)'}{\left(x+e^x\right)^2}$ $=-\frac{\left(2e^x\right)\left(x+e^x\right)-2e^x\left(1+e^x\right)}{\left(x+e^x\right)^2}=-\frac{2e^x(x-1)}{\left(x+e^x\right)^2}=\frac{2e^x(1-x)}{\left(x+e^x\right)^2}$	**2p** **3p**
1b	$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=a\Rightarrow y=a$ este ecuatia A.O. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}1-\frac{2e^x}{x+e^x}=1-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x}{x+e^x}$ $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x}{x+e^x}\underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x}{1+e^x}\underset{L'H}{\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}}\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2e^x}{e^x}=2$ $y=-1$ A.O.	**1p** **1p** **2p** **1p**
1c	Determinarea eventualelor puncte de extrem local $f'(x)=0\Leftrightarrow 1-x=0\Leftrightarrow x=1$ Calculul $f(0)=-1$ și Calculul $f(1)=\frac{1-e}{1+e}$ $\begin{array}{c\|ccccc} x & 0 & & 1 & & \infty \\ \hline f'(x) & +++ & +++ & 0 & --- & --- \\ \hline f(x) & \begin{matrix}-1\\(\min)\end{matrix} & \nearrow & \begin{matrix}\frac{1-e}{1+e}\\(\max)\end{matrix} & \searrow & \begin{matrix}-1\\(\min)\end{matrix} \end{array}$ $\Leftrightarrow -1\le f(x)\le\frac{1-e}{1+e},(\forall)x\ge 0$	**1p** **1p** **2p** **1p**
2a	$I_1=\int_0^1\frac{x}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1-1}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x+1}{x+1}dx-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx=\int_0^1 dx-\int_0^1\frac{1}{x+1}dx$ $=x\Big\vert_0^1-\ln(x+1)\Big\vert_0^1=1-\ln 2$	**3p** **2p**
2b	$I_n+I_{n+1}=\int_0^1\frac{x^n}{x+1}dx+\int_0^1\frac{x^{n+1}}{x+1}dx=\int_0^1\frac{x^n+x^{n+1}}{x+1}dx$ $\int_0^1\frac{x^n\cancel{(1+x)}}{\cancel{x+1}}dx=\int_0^1 x^n dx=\frac{x^{n+1}}{n+1}\Big\vert_0^1=\frac{1}{n+1}$	**2p** **3p**
2c	$\frac{x^{2022}}{2}\le\frac{x^{2022}}{x+1}\le x^{2022}$, pentru orice $x\in[0,1]$ Integrăm $\int_0^1\frac{x^{2022}}{2}dx\le\int_0^1\frac{x^{2022}}{x+1}dx\le\int_0^1 x^{2022}dx$ Obținem $\frac{x^{2023}}{2\cdot 2023}\Big\vert_0^1\le I_{2022}\le\frac{x^{2023}}{2023}\Big\vert_0^1$ Înmulțim cu 2023 și reiese inegalitatea.	**2p** **2p** **1p**