



Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică

Varianta 1

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.
- La toate subiectele se cer rezolvări complete.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Determinați primul termen al progresiei aritmetice  $(a_n)_{n \geq 1}$ , știind că  $a_3 = 11$  și  $a_{10} = 32$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = -2x + 11$ . Determinați numărul real  $a$  pentru care punctul  $A(a+1, 7a)$  aparține graficului funcției  $f$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\log_5(x+19) - \log_5(2x) = \log_5 10$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie format doar din cifre pare.
- 5p 5. În reperul cartezian  $(xOy)$  se consideră punctele  $A(-2, 5)$ ,  $B(6, 7)$ ,  $O(0, 0)$ ,  $M(a, b)$ , unde  $a, b \in \mathbb{R}$ , iar  $M$  este mijlocul segmentului  $AB$ . Calculați distanța dintre punctele  $O$  și  $M$ .
- 5p 6. Se consideră triunghiul  $ABC$  dreptunghic în  $C$ , cu  $AB = 20$  și măsura unghiului  $A$  egală cu  $60^\circ$ . Arătați că aria triunghiului  $ABC$  este egală cu  $50\sqrt{3}$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Se consideră matricea  $A(m) = \begin{pmatrix} 1+5m & 10m \\ -2m & 1-4m \end{pmatrix}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ .
- 5p a) Arătați că  $\det A(-1) = 0$ .
- 5p b) Demonstrați că  $A(m) \cdot A(-1) = A(-1)$ ,  $\forall m \in \mathbb{R}$ .
- 5p c) Calculați determinantul matricei  $B = A(-10) \cdot A(-9) \cdot \dots \cdot A(9) \cdot A(10)$ .
- 5p 2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție  $x * y = -xy + 5x + 5y - 20$ .
- 5p a) Arătați că  $\left(-\frac{1}{5}\right) * 5 = 5$ .
- 5p b) Demonstrați că  $e = 4$  este elementul neutru al legii de compoziție " $*$ ".
- 5p c) Determinați numerele naturale nenule  $n$  pentru care  $\frac{1}{n} * n < n$ .

Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT 2023 - Probă scrisă la matematică

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*



**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f : (3, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 3}$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x^2 - 6x - 3}{(x - 3)^2}, x \in (3, \infty)$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe intervalul  $(3, \infty)$ .
2. Se consideră funcția  $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^e \left( f(x) - \frac{1}{x+1} \right) dx = 1$ .
- 5p b) Demonstrați că funcția  $F : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \ln(x^2 + x) - \ln 2$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că orice primitivă a funcției  $f$  este strict crescătoare pe intervalul  $(0, \infty)$ .



Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică

Varianta 1

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

- ◆ Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- ◆ Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- ◆ Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea punctajului obținut la 10.

**SUBIECTUL I**

(30 de puncte)

1.	Notăm cu $r$ rația progresiei aritmetice. $a_3 = 11, a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 + 2r = 11. a_{10} = 32, a_{10} = a_1 + 9r \Rightarrow a_1 + 9r = 32.$ $7r = 21 \Rightarrow r = 3.$ $a_1 + 2r = 11 \Rightarrow a_1 + 2 \cdot 3 = 11 \Rightarrow a_1 = 5.$	2p 1p 2p
2.	$A(a + 1, 7a) \in \mathcal{G}_f \Leftrightarrow f(a + 1) = 7a \Leftrightarrow -2(a + 1) + 11 = 7a.$ $-2a + 9 = 7a \Leftrightarrow 9a = 9 \Leftrightarrow a = 1.$	3p 2p
3.	$\begin{cases} x + 19 > 0 \\ 2x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -19 \\ x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \in (0, \infty).$ $\log_5 \frac{x+19}{2x} = \log_5 10, \text{ de unde obținem } \frac{x+19}{2x} = 10.$ $x + 19 = 20 \cdot x \Leftrightarrow 19x = 19 \Leftrightarrow x = 1. 1 \in (0, \infty) \Rightarrow S = \{1\}.$	1p 3p 1p
4.	Mulțimea numerelor naturale de 2 cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile. Cifra unităților, fiind pară, se poate alege în 5 moduri. Pentru fiecare alegere a cifrei unităților, cifra zecilor, fiind pară și nenulă, se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $5 \cdot 4 = 20$ de numere naturale de 2 cifre, cu ambele cifre pare. Numărul cazurilor favorabile este egal cu 20. $p = \frac{\text{nr.cazurilor favorabile}}{\text{nr.cazurilor posibile}} = \frac{20}{90} = \frac{2}{9}.$	2p 2p 1p
5.	$M(a, b)$ este mijlocul segmentului $AB \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{x_A + x_B}{2} \\ b = \frac{y_A + y_B}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{-2+6}{2} \\ b = \frac{5+7}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = 6 \end{cases}.$ $OM = \sqrt{(x_M - x_O)^2 + (y_M - y_O)^2} = \sqrt{(2 - 0)^2 + (6 - 0)^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}.$	2p 3p
6.	$\Delta ABC : m(\sphericalangle A) + m(\sphericalangle B) + m(\sphericalangle C) = 180^\circ \Rightarrow 60^\circ + m(\sphericalangle B) + 90^\circ = 180^\circ$ $\Rightarrow m(\sphericalangle B) = 30^\circ. \sin B = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{AC}{20} \Rightarrow AC = 10.$ $BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 10\sqrt{3}. \mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{10 \cdot 10\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}.$	2p 3p



**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 + 5 \cdot (-1) & 10 \cdot (-1) \\ -2 \cdot (-1) & 1 - 4 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ $\det A(-1) = \begin{vmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = (-4) \cdot 5 - (-10) \cdot 2$ <p>Finalizarea calculului <math>\det A(-1) = 0</math></p>	1p 2p 2p
b)	$A(m) \cdot A(-1) = \begin{pmatrix} 1 + 5m & 10m \\ -2m & 1 - 4m \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -10 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} (-4) \cdot (1 + 5m) + 10m \cdot 2 & (-10) \cdot (1 + 5m) + 10m \cdot 5 \\ (-2m) \cdot (-4) + (1 - 4m) \cdot 2 & (-2m) \cdot (-10) + (1 - 4m) \cdot 5 \end{pmatrix} =$ <p>Finalizarea calculului: <math>\begin{pmatrix} -4 &amp; -10 \\ 2 &amp; 5 \end{pmatrix} = A(-1), (\forall)m \in \mathbb{R}</math></p>	1p 2p 2p
c)	$\det B = \det[A(-10) \cdot A(-9) \cdots A(9) \cdot A(10)] =$ $\det A(-10) \cdot \det A(-9) \cdots \det A(9) \cdot \det A(10) =$ $\det A(-10) \cdot \det A(-9) \cdots \det A(-1) \cdots \det A(9) \cdot \det A(10) = 0, \text{ deoarece } \det A(-1) = 0.$ <p>Sau</p> <p>Folosind <math>A(m) \cdot A(-1) = A(-1), (\forall)m \in \mathbb{R}</math></p> <p>Verificarea relației: <math>A(-1) \cdot A(m) = A(-1), (\forall)m \in \mathbb{R}</math></p> <p>Efectuarea calculului: <math>B = A(-10) \cdot A(-9) \cdots A(9) \cdot A(10) =</math></p> $A(-10) \cdot A(-9) \cdots A(-1) \cdots A(9) \cdot A(10) = A(-1).$ $\det B = \det[A(-10) \cdot A(-9) \cdots A(9) \cdot A(10)] = \det A(-1) = 0.$	2p 3p 2p 2p 1p
2.a)	$\left(-\frac{1}{5}\right) * 5 = -\left(-\frac{1}{5}\right) \cdot 5 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) + 5 \cdot 5 - 20 =$ $= 1 - 1 + 25 - 20 = 5$	3p 2p
b)	<p>(<math>\exists</math>)<math>e \in \mathbb{R}</math> astfel încât (<math>\forall</math>)<math>x \in \mathbb{R}, x * e = e * x = x</math></p> $x * e = x, (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow -xe + 5x + 5e - 20 = x, (\forall)x \in \mathbb{R}$ $\Leftrightarrow (x - 5)(4 - e) = 0, (\forall)x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow e = 4$ <p>Verificarea relației: <math>4 * x = x, (\forall)x \in \mathbb{R}</math></p>	1p 3p 1p
c)	$\frac{1}{n} * n < n \Leftrightarrow -\frac{1}{n} \cdot \frac{n}{1} + 5 \cdot \frac{1}{n} + 5 \cdot n - 20 < n \Leftrightarrow -1 + \frac{5}{n} + 5n - 20 - n < 0$ $\Leftrightarrow 4n^2 - 21n + 5 < 0$ $\Delta = 361; n_1 = \frac{1}{4} \text{ și } n_2 = 5 \Rightarrow n \in \left(\frac{1}{4}, 5\right)$ $n \in \left(\frac{1}{4}, 5\right) \cap \mathbb{N}^* \Rightarrow S = \{1, 2, 3, 4\}$	2p 2p 1p



SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(2x+2)(x-3) - (x^2+2x-3) \cdot 1}{(x-3)^2}$ $= \frac{2x^2 - 6x + 2x - 6 - x^2 - 2x + 3}{(x-3)^2} = \frac{x^2 - 6x - 3}{(x-3)^2}, x \in (3, \infty).$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 3}{x(x-3)} = 1 \Rightarrow m = 1 \in \mathbb{R}^*$ $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{x^2 + 2x - 3}{x-3} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x - 3}{x-3} = 5 \Rightarrow n = 5 \in \mathbb{R}.$ <p>Dreapta de ecuație <math>y=x+5</math> este asimptotă oblică spre <math>+\infty</math> la graficul funcției <math>f</math>.</p>	3p 2p
c)	$f''(x) = \left( \frac{x^2 - 6x - 3}{(x-3)^2} \right)' = \frac{(2x-6)(x-3)^2 - (x^2 - 6x - 3) \cdot 2 \cdot (x-3)}{(x-3)^4} = \frac{24}{(x-3)^3}$ <p><math>f''(x) &gt; 0</math>, pentru orice <math>x \in (3, \infty)</math>, de unde obținem că <math>f</math> este convexă pe <math>(3, \infty)</math>.</p>	3p 2p
2.a)	$\int_1^e \left( f(x) - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_1^e \left( \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} \right) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx$ $= \ln x  \Big _1^e = \ln e - \ln 1 = 1$	2p 3p
b)	<p><math>F</math> se obține din operații cu funcții derivabile pe <math>(0, +\infty)</math>, deci <math>F</math> este derivabilă pe <math>(0, +\infty)</math>.</p> $F'(x) = (\ln(x^2 + x) - \ln 2)' = \frac{2x+1}{x^2+x} - 0 =$ $= \frac{2x+1}{x^2+x} = \frac{x+x+1}{x(x+1)} = \frac{x}{x(x+1)} + \frac{x+1}{x(x+1)} = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x} = f(x),$ <p><math>F</math> este derivabilă pe <math>(0, \infty)</math> și <math>F'(x) = f(x), \forall x \in (0, \infty)</math>. Deci <math>F</math> este o primitivă a funcției <math>f</math>.</p>	1p 2p 1p 1p
c)	<p>Fie <math>G: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}</math> o primitivă a funcției <math>f \Rightarrow G</math> este derivabilă pe <math>(0, \infty)</math> și <math>G'(x) = f(x), (\forall)x \in (0, \infty)</math>.</p> <p>Deoarece <math>x &gt; 0</math>, rezultă că <math>\frac{1}{x} &gt; 0</math> și <math>\frac{1}{x+1} &gt; 0</math>, adică <math>f(x) &gt; 0, (\forall)x \in (0, \infty)</math>.</p> <p><math>G'(x) = f(x) &gt; 0, (\forall)x \in (0, \infty) \Rightarrow G</math> este strict crescătoare pe <math>(0, \infty)</math>.</p>	1p 2p 2p