Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Fie $z \in \mathbb{C}$ astfel încât $z + 2\overline{z} = 3 + i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul numărului z.
Calculați modulul numărului $\frac{z+2i}{z}$.

5p **2.** Determinați valorile parametrului real m, astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - (m+1)x + 9$ să verifice condiția $f(x) \geq 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5 - \sqrt{x+1} = x$.

5p **4.** Aflați câte numere naturale de patru cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,2,4,6\}$.

5p **5.** Scrieți ecuația înălțimii din B a triunghiului ABC care are vârfurile $A(-1,1)$, $B(1,3)$ și $C(4,2)$.

5p **6.** Calculați $E(x) = \cos(x+30^\circ)\cdot\cos(60^\circ - x) + \sin(x - 60^\circ)\cdot\sin(x+30^\circ)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. În mulțimea $M_3(\mathbb{R})$ se consideră matricele: $A(a) = \begin{pmatrix} a & -a & -a \\ -a & a & -a \\ -a & -a & a \end{pmatrix}$, $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $O_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

5p **a)** Arătați că $\det(A(-1)) + \det(A(1)) = 0$.

5p **b)** Aflați $a \in \mathbb{R}$ știind că $(A(a))^2 - A(a) - 2I_3 = O_3$.

5p **c)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația: $\det(A(-1) + xI_3) = 0$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = 2xy - 6(x+y) + 21$.

5p **a)** Arătați că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

5p **b)** Demonstrați că $N = \sqrt[3]{-2023} * \sqrt[3]{-2022} * \sqrt[3]{-2021} * \ldots * \sqrt[3]{2021} * \sqrt[3]{2022} * \sqrt[3]{2023}$ este număr natural.

5p **c)** Știind că $(G,*)$ este grup, arătați că funcția $f:(0,+\infty)\to G$, $f(x) = \frac{1}{2}x + 3$ este un izomorfism de la grupul $((0,+\infty),\cdot)$ la grupul $(G,*)$, unde $G = (3,+\infty)$ și „$\cdot$” reprezintă operația de înmulțire a numerelor reale.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{3(x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați ecuația asimptotei spre $-\infty$ la graficul funcției f.

5p **c)** Arătați că $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^4+x^2+1}\geq\dfrac{2-x-x^2}{2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2. Fie funcția $f:(-1,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\ln(1+x)$.

5p **a)** Arătați că $\displaystyle\int_0^1 (f(x)+\ln(1+x))dx=\frac{5}{12}$.

5p **b)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx\geq 0$.

5p **c)** Demonstrați că $\displaystyle\int_0^1 (\ln(1+x)-x)dx\leq-\frac{1}{12}$.

Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023
Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z=a+bi,\ \overline{z}=a-bi,\ a,b\in\mathbb{R}.\ z+2\overline{z}=3+i \Leftrightarrow 3a-bi=3+i$	**2p**
	$a=1,\ b=-1 \Rightarrow z=1-i$	**2p**
	$\left\lvert\frac{z+2i}{z}\right\rvert=\left\lvert\frac{1+i}{1-i}\right\rvert=\frac{\lvert 1+i\rvert}{\lvert 1-i\rvert}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=1$	**1p**
2.	Cum $a=1>0$, se impune condiția $\Delta\le 0$	**2p**
	$\Delta=(m+1)^2-36\le 0 \Rightarrow \lvert m+1\rvert\le 6$	**2p**
	$m\in[-7,5]$	**1p**
3.	Se impun condiții de existență și compatibilitate $x+1\ge 0$ și $5-x\ge 0 \Rightarrow x\in[-1,5]$	
	Se obține $x+1=(5-x)^2 \Leftrightarrow x^2-11x+24=0$	**2p**
	$x_1=3\in[-1,5]$ și $x_2=8\notin[-1,5]$	**2p**
	$x=3$ care convine	**1p**
4.	$\overline{abcd}$, $a\in\{2,4,6\}\Rightarrow a$ ia 3 valori; $b\in\{0,2,4,6\}, b\ne a \Rightarrow b$ ia 3 valori;	**2p**
	$c\in\{0,2,4,6\}$, $c\ne a, c\ne b \Rightarrow c$ ia 2 valori; $d\in\{0,2,4,6\}, d\ne a, d\ne b, d\ne c \Rightarrow d$ ia o valoare;	**2p**
	Sunt $3\cdot 3\cdot 2\cdot 1=18$ numere	**1p**
5.	Fie $BB'\perp AC,\ B'\in AC \Rightarrow m_{BB'}\cdot m_{AC}=-1$; $m_{AC}=\frac{y_C-y_A}{x_C-x_A}=\frac{1}{5}$	**2p**
	$m_{BB'}=-5$; înălțimea BB' are ecuația $(BB'): y-y_B=m_{BB'}(x-x_B)$	**2p**
	$(BB'): 5x+y-8=0$	**1p**
6.	Folosind imparitatea funcției sinus, se obține: $\sin(x-60^\circ)=-\sin(60^\circ-x)$	
	$E(x)=\cos(x+30^\circ)\cdot\cos(60^\circ-x)-\sin(x+30^\circ)\cdot\sin(60^\circ-x)$	**2p**
	Folosind formula $\cos a\cdot\cos b-\sin a\cdot\sin b=\cos(a+b)$ se obține	
	$E(x)=\cos(x+30^\circ+60^\circ-x)=\cos 90^\circ$	**2p**
	$E(x)=0$	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(-1)=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(a(-1))=-1+1+1+1+1+1=4$	**2p**
	$A(1)=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=1-1-1-1-1-1=-4$	**2p**
	$\det(A(-1))+\det(A(1))=4-4=0$	**1p**
b)	$(A(a))^2=\begin{pmatrix}3a^2 & -a^2 & -a^2\\ -a^2 & 3a^2 & -a^2\\ -a^2 & -a^2 & 3a^2\end{pmatrix}$ $(A(a))^2-A(a)-2I_3=O_3\Rightarrow\begin{pmatrix}3a^2-a-2 & -a^2+a & -a^2+a\\ -a^2+a & 3a^2-a-2 & -a^2+a\\ -a^2+a & -a^2+a & 3a^2-a-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\Rightarrow$	**2p**
	$\begin{cases}3a^2-a-2=0\Rightarrow a\in\left\{-\frac{2}{3},1\right\}\\ -a^2+a=0\Rightarrow a\in\{0,1\}\end{cases}\Rightarrow$	**2p**
	$a=1$	**1p**
c)	$A(-1)+xI_3=\begin{pmatrix}x-1 & 1 & 1\\ 1 & x-1 & 1\\ 1 & 1 & x-1\end{pmatrix}$	**1p**
	$\det(A(-1)+xI_3)=0\Leftrightarrow\begin{vmatrix}x-1 & 1 & 1\\ 1 & x-1 & 1\\ 1 & 1 & x-1\end{vmatrix}=0\overset{c_1+c_2+c_3}{\Leftrightarrow}\begin{vmatrix}x+1 & 1 & 1\\ x+1 & x-1 & 1\\ x+1 & 1 & x-1\end{vmatrix}=0$ $\Leftrightarrow(x+1)\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & x-1 & 1\\ 1 & 1 & x-1\end{vmatrix}=0\Leftrightarrow(x+1)(x-2)^2=0$	**2p**
	$x\in\{-1,2\}$	**2p**
2.a)	$x*y=2xy-6x-6y+18+3=$	**1p**
	$=2x(y-3)-6(y-3)+3$	**2p**
	$x*y=2(x-3)(y-3)+3$, pentru orice $x,y\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Se arată că $x*3=3*x=3,\forall x\in\mathbb{R}$	**2p**
	Folosind proprietatea de asociativitate a legii de compoziție „$*$”, se obține $N=(\sqrt[3]{-2023}*\sqrt[3]{-2022}*\ldots*\sqrt[3]{26})*3*(\sqrt[3]{28}*\sqrt[3]{29}*\ldots*\sqrt[3]{2022}*\sqrt[3]{2023})=a*3*b=(a*3)*b=$	**2p**
	$=3*b=3\in\mathbb{N}$	**1p**
c)	$f(xy)=\frac{1}{2}xy+3$; $f(x)*f(y)=\left(\frac{1}{2}x+3\right)*\left(\frac{1}{2}y+3\right)=2\left(\frac{1}{2}x+3-3\right)\left(\frac{1}{2}y+3-3\right)+3=\frac{1}{2}xy+3$	**2p**

	$f(xy)=f(x)*f(y),\forall x,y\in(0,+\infty)$, prin urmare f este morfism $f(x)=\frac{1}{2}x+3$ este funcție de gradul I, strict crescătoare pe $(0,+\infty)$, prin urmare f este injectivă $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=3$, $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$, f continuă, f strict crescătoare pe $(0,+\infty)\Rightarrow \operatorname{Im} f=(3,+\infty)=G$, prin urmare f este surjectivă f este morfism și f este bijectivă, prin urmare f este izomorfism de grupuri de la $((0,+\infty),\cdot)$ la $(G,*)$	**2p** **1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	f este derivabilă pe $\mathbb{R}$ (operații cu funcții derivabile pe $\mathbb{R}$) $f'(x)=\dfrac{(x-1)'\sqrt{x^2+x+1}-(x-1)\left(\sqrt{x^2+x+1}\right)'}{x^2+x+1}=\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-(x-1)\cdot\dfrac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}}{x^2+x+1}=$ $=\dfrac{2(x^2+x+1)-(x-1)(2x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}=\dfrac{2x^2+2x+2-2x^2-x+2x+1}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$ $f'(x)=\dfrac{3(x+1)}{2(x^2+x+1)\sqrt{x^2+x+1}}$, $\forall x\in\mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**
b)	$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{\lvert x\rvert\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}}=-1$ Dreapta de ecuație $y=-1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	**3p** **2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x+1=0\Leftrightarrow x=-1$ $f'(x)\le 0$, pentru orice $x\in(-\infty,-1]\Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty,-1]$ și $f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1,+\infty)$ $x=-1$ punct de minim al funcției $\Rightarrow f(x)\ge f(-1)$, $\forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow f(x)\ge -2$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x)\ge -2\Rightarrow\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}\ge -2\Rightarrow x-1\ge -2\sqrt{x^2+x+1}\Rightarrow\sqrt{x^2+x+1}\ge\dfrac{1-x}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ $f(x^2)\ge -2\Rightarrow\dfrac{x^2-1}{\sqrt{x^4+x^2+1}}\ge -2\Rightarrow x^2-1\ge -2\sqrt{x^4+x^2+1}\Rightarrow\sqrt{x^4+x^2+1}\ge\dfrac{1-x^2}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$ Finalizare $\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^4+x^2+1}\ge\dfrac{2-x-x^2}{2}$, $\forall x\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**

2.a)	$\int_0^1 (f(x)+\ln(1+x))dx=\int_0^1\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}\right)\Big\|_0^1$ $=\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}=$ $=\frac{5}{12}$	**2p** **2p** **1p**
b)	f este derivabilă pe $(-1,+\infty)$ (operații cu funcții derivabile pe $(-1,+\infty)$) $f'(x)=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)\right)'=1-x+x^2-\frac{1}{1+x}=\frac{1-x+x^2+x-x^2+x^3-1}{1+x}=\frac{x^3}{1+x}, \forall x\in(-1,+\infty)$. $f'(x)\geq 0,\ \forall x\in[0,1]\Rightarrow f$ crescătoare pe $[0,1]\Rightarrow f(x)\geq f(0)\Rightarrow f(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,1]$ f continuă, integrabilă pe $[0,1]$, $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,1]\Rightarrow \int_0^1 f(x)dx\geq 0$	**2p** **2p** **1p**
c)	Conform punctului precedent, $f(x)\geq 0$, $\forall x\in[0,1]\Rightarrow x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\ln(1+x)\geq 0$, $\forall x\in[0,1]\Rightarrow$ $\ln(1+x)-x\leq -\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$, $\forall x\in[0,1]$; cele două funcții fiind continue și integrabile pe $[0,1]$ și aplicând proprietatea de monotonie a integralei definite, rezultă că $\int_0^1(\ln(1+x)-x)dx\leq\int_0^1\left(-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}\right)dx\Rightarrow\int_0^1(\ln(1+x)-x)dx\leq\left(-\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{12}\right)\Big\|_0^1$ $\int_0^1(\ln(1+x)-x)dx\leq -\frac{1}{12}$	**2p** **2p** **1p**