Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Știind că $z \in \mathbb{C}$ și că $z^2 + z + 2 = 0$, demonstrați că $z^2 + \frac{4}{z^2} = -3$.

5p **2.** Rezolvați în $\mathbb{Z}$ inecuația $f(x) \geq f(1-2x)$, dacă $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\frac{x^2-1}{\sqrt{x-1}} = \sqrt{x+1}$.

5p **4.** Determinați termenul care **nu** îl conține pe *x* din dezvoltarea $\left(x^3 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right)^{14}$, unde $x \in (0, \infty)$.

5p **5.** Se consideră paralelogramul *ABCD* și punctele *M* și *N* astfel încât $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ și $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$. Demonstrați că punctele *D, M* și *N* sunt coliniare.

5p **6.** Arătați că, dacă *ABC* este un triunghi oarecare, atunci $\cos A < \frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC} + \frac{AC}{AB}\right)$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(m) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ m & m^2 & 1 \\ m+1 & (m+1)^2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, unde *m* este un număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0)) = 0$.

5p **b)** Determinați mulțimea valorilor reale ale lui *m* pentru care $\det(A(m)) \neq 0$.

5p **c)** În reperul cartezian (xOy) considerăm punctele necoliniare $A(1,1)$, $B(m, m^2)$, $C(m+1, (m+1)^2)$, unde $m \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui *m*, știind că aria triunghiului *ABC* este egală cu 1.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = -5xy + 10x + 10y - 18$.

5p **a)** Demonstrați că $x * y = 2 - 5(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale *x* și *y*.

5p **b)** Arătați că, dacă $a * a = b$ și $b * b = a$, atunci $a = b = 2$ sau $a = b = \frac{9}{5}$.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule m, știind că funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = me^x + 2$ verifică relația $f(x+y) = f(x) * f(y)$, pentru orice numere reale *x* și *y*.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{1+\ln x}$.

5p **a)** Studiați existența asimptotelor verticale la graficul funcției f.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $P\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$, care este paralelă cu dreapta d, de ecuație $x-4y+2023=0$.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\left(1+\sqrt{1+n^2}\right)\le\sqrt{1+n^2}$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}^*$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=1+\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 f(x)dx=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.

5p **b)** Determinați $a\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\int_0^a f(\operatorname{tg} x)dx=\frac{\pi+2\sqrt{2}}{4}$.

5p **c)** Demonstrați că $\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=0$.

Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – ianuarie 2023

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+z+2=0 \Rightarrow z\neq 0$ şi $z+\frac{2}{z}=-1$	**2p**
	$\left(z+\frac{2}{z}\right)^2=1$, așadar $z^2+4+\frac{4}{z^2}=1$,	**2p**
	de unde obținem $z^2+\frac{4}{z^2}=-3$.	**1p**
2.	Inecuația este $1+x^2\geq 1+(1-2x)^2$	**2p**
	$3x^2-4x+1\leq 0 \Rightarrow x\in\left[\frac{1}{3},1\right]$.	**2p**
	$x\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=1$	**1p**
3.	$x^2-1=\sqrt{x^2-1}\Rightarrow x^2-1=0$ sau $x^2-1=1$	**2p**
	$x=-\sqrt{2}$, care nu convine, sau $x=-1$, care nu convine, sau $x=1$ care nu convine,	**2p**
	sau $x=\sqrt{2}$, care convine.	**1p**
4.	$T_{k+1}=C_{14}^k\left(x^3\right)^{14-k}\cdot\left(x^{-\frac{1}{2}}\right)^k=C_{14}^k x^{42-\frac{7k}{2}}, k=\overline{0,14}$.	**2p**
	$42-\frac{7k}{2}=0\Rightarrow k=12$	**1p**
	$\Rightarrow T_{13}=C_{14}^{12}=91$	**2p**
5.	$\overrightarrow{DM}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}\right)=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)$	**2p**
	$\overrightarrow{DN}=\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{DA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}-3\overrightarrow{AD}\right)=\frac{4}{3}\overrightarrow{DM}$,	**2p**
	adică $\overrightarrow{DM}$ și $\overrightarrow{DN}$ sunt coliniari, de unde obținem coliniaritatea punctelor *D*, *M* și *N*.	**1p**
6.	$\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}=\frac{AB^2+AC^2}{AB\cdot AC}$	**2p**
	Dar, $\cos A=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}<\frac{AB^2+AC^2}{2AB\cdot AC}$,	**2p**
	obținem $\cos A<\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{AC}+\frac{AC}{AB}\right)$.	**1p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ $\Rightarrow \det(A(0))=\begin{vmatrix}1&1&1\\0&0&1\\1&1&1\end{vmatrix}=$ $=0+0+1-0-1-0=0$	**1p** **2p** **2p**
b)	$\det(A(m))=\begin{vmatrix}1&1&1\\m&m^2&1\\m+1&(m+1)^2&1\end{vmatrix}=m(m-1)$, pentru orice număr real m. $\det(A(m))\neq 0 \Rightarrow m\in\mathbb{R}\setminus\{0,1\}$	**3p** **2p**
c)	$\mathcal{A}_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\lvert\Delta\rvert$, unde $\Delta=\begin{vmatrix}x_A&y_A&1\\x_B&y_B&1\\x_C&y_C&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&1&1\\m&m^2&1\\m+1&(m+1)^2&1\end{vmatrix}=m(m-1)$ $\mathcal{A}_{\Delta ABC}=1\Leftrightarrow \lvert m(m-1)\rvert=2$, deci, $m^2-m=2$, de unde obținem $m=-1$ sau $m=2$; convin ambele valori, sau $m^2-m=-2$, care nu convine.	**2p** **2p** **1p**
2.a)	$x*y=-5xy+10x+10y-20+2=$ $=-5x(y-2)+10(y-2)+2$ $=2-5(x-2)(y-2)$	**2p** **2p** **1p**
b)	$a*a=b\Leftrightarrow 2-5(a-2)^2=b$. $b*b=a\Leftrightarrow 2-5(b-2)^2=a$, de unde $a-2=-125(a-2)^4$. Obținem, astfel, $a=2=b$, sau $a-2=-\frac{1}{5}\Rightarrow a=\frac{9}{5}=b$	**1p** **2p** **2p**
c)	$f(x+y)=m\cdot e^{x+y}+2$, iar $f(x)*f(y)=2-5\cdot m^2\cdot e^{x+y}$ Ținând cont de condiția $m\neq 0\Rightarrow m=-\frac{1}{5}$.	**1p** **2p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ x<\frac{1}{e}}}\frac{x}{1+\ln x}=-\infty$, iar $\lim\limits_{\substack{x\to\frac{1}{e}\\ x>\frac{1}{e}}}\frac{x}{1+\ln x}=+\infty$; astfel, $x=\frac{1}{e}$ este ecuația asimptotei verticale.	**2p** **1p**

	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\x>0}}\frac{x}{1+\ln x}=0$; dacă $x_0\in(0,\infty)\setminus\left\{\frac{1}{e}\right\}$, atunci $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)\in\mathbb{R}$. Nu mai sunt alte asimptote verticale.	**2p**
b)	Panta tangentei în punctul $P(x_0,f(x_0))$, la graficul funcției, este egală cu panta dreptei d $f'(x_0)=\frac{1}{4}$	**1p**
	$f'(x)=\frac{\ln x}{(1+\ln x)^2}$; obținem ecuația $\frac{1}{4}=\frac{\ln x_0}{(1+\ln x_0)^2}\Rightarrow(\ln x_0-1)^2=0\Rightarrow x_0=e$, $f(e)=\frac{e}{2}$.	**2p**
	Ecuația tangentei în punctul $P\left(e,\frac{e}{2}\right)$ este $x-4y+e=0$.	**2p**
c)	$f'(x)=0\Leftrightarrow x=1$.	**1p**
	$f'(x)\ge 0$, pentru orice $x\in[1,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $[1,+\infty)\Rightarrow f(x)\ge f(1)$, $\forall x\ge 1$. Astfel, $x\ge 1+\ln x$, $\forall x\ge 1$.	**2p**
	Relația este adevărată și pentru $x=1+\sqrt{1+n^2}$, $\forall n\ge 1$. Obținem: $\ln\left(1+\sqrt{1+n^2}\right)\le\sqrt{1+n^2}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$.	**2p**
2.a)	$\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 1dx+\int_0^1\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}=$	**1p**
	$=\left(x+\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)\Big\|_0^1=$	**2p**
	$=1+\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$.	**2p**
b)	$f(\operatorname{tg}x)=1+\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2x}}=1+\cos x$	**2p**
	$\int_0^a(1+\cos x)dx=(x+\sin x)\Big\|_0^a=a+\sin a$.	**2p**
	$a+\sin a=\frac{\pi}{4}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow a=\frac{\pi}{4}$.	**1p**
c)	f este funcție pară; $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=1$; $f'(x)=\frac{-x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}, x\in\mathbb{R}$. f este crescătoare dacă $x\in(-\infty,0]$ ($f'(x)\ge 0$); f este descrescătoare dacă $x\in[0,\infty)$ ($f'(x)\le 0$), $f(0)=2$; astfel, $1<f(x)\le 2$, $\forall x\in\mathbb{R}$.	**2p**
	$\int_0^x 1dt<\int_0^x f(t)dt\le\int_0^x 2dt\Rightarrow x<\int_0^x f(t)dt\le 2x\Big\|\cdot\frac{1}{x^2}\Rightarrow\frac{1}{x}<\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt\le\frac{2}{x}$	**2p**
	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x}=0\Rightarrow\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}\int_0^x f(t)dt=0$.	**1p**