EXAMENUL DE BACALAUREAT 2023
Proba E.c) Matematică M_tehnologic, Simulare județeană

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

Subiectul I (30 puncte)

5p **1**. Arătați că numărul $a=\sqrt{\left(1-\sqrt{23}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\sqrt{23}\right)^2}$ este număr întreg.

5p **2**. Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=2x+2,\ g(x)=x^2-1$.

Determinați punctele de intersecție ale graficelor celor două funcții.

5p **3**. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^x-3^{x+1}+3^{x+2}=63$.

5p **4**. Determinați numărul elementelor unei mulțimi care are 21 de submulțimi cu exact 2 elemente.

5p **5**. Determinați $m\in\mathbb{R}$ astfel încât vectorii $\vec{u}=m\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$ să fie coliniari.

5p **6**. Arătați că pentru orice $x\in\mathbb{R}$ este adevărată egalitatea $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\sin x$.

Subiectul II (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

5p **a)** Demonstrați că $(I_2+A)^2=I_2+A$, unde $I_2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$.

5p **b)** Arătați că mulțimea $\{A^n\mid n\in\mathbb{N}^*\}$ este finită.

5p **c)** Calculați $\det(23\cdot I_2-A+A^2-A^3+\ldots-A^{23})$.

2. Pe $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x\circ y=3xy+3x+3y+2,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.

5p **a)** Să se arate că $x\circ y=3(x+1)(y+1)-1\ \forall x,y\in\mathbb{R}$

5p **b)** Determinați mulțimea elementelor simetrizabile din $\mathbb{R}$ față de legea de compoziție considerată.

5p **c)** Arătați că $(-10)\circ(-9)\circ\ldots\circ 0\circ 1\circ\ldots\circ 10<0$.

Subiectul III (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{-2\}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x^2+3x+3}{x+2}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Determinați punctele de extrem ale funcției.

5p **c)** Scrieți ecuația asimptotei către $+\infty$ la graficul funcției.

2. Se consideră funcțiile $f,F:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=e^x(x^2-3x-3),\ F(x)=e^x(x^2-5x+2)$.

5p **a)** Arătați că funcția F este o primitivă a funcției f.

5p **b)** Arătați că $\int_{-2}^{-1}f(x)dx=\frac{8e-16}{e^2}$.

5p **c)** Determinați punctele de inflexiune ale graficului funcției F.

EXAMENUL DE BACALAUREAT NAȚIONAL 2023

Proba E.c) M_*tehnologic*

Simulare județeană

BAREM ORIENTATIV DE NOTARE ȘI EVALUARE

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	Avem $a=\sqrt{\left(1-\sqrt{23}\right)^2}-\sqrt{\left(1+\sqrt{23}\right)^2}=\left\|1-\sqrt{23}\right\|-\left\|1+\sqrt{23}\right\|$,	2p
	de unde $a=\sqrt{23}-1-1-\sqrt{23}=-2\in\mathbb{Z}$.	3p
2.	$Gf\cap Gg\neq\phi\Leftrightarrow$ ecuația $f(x)=g(x)$ are soluții reale $f(x)=g(x)\Leftrightarrow 2x+2=x^2-1\Leftrightarrow x^2-2x-3=0$	3p
	Ecuația $x^2-2x-3=0$ are soluțiile: $x_1=-1\Rightarrow y_1=0$ și se obține punctul de intersecție $A(-1,0)$ și $x_2=3\Rightarrow y_2=8$ și se obține punctul de intersecție $B(3,8)$	2p
3.	$3^x-3^{x+1}+3^{x+2}=63\Leftrightarrow 3^x(1-3+9)=63$.	3p
	Se obține $7\cdot 3^x=63\Leftrightarrow 3^x=9$, de unde $x=2$.	2p
4.	Numărul submulțimilor cu 2 elemente ale unei mulțimi cu *n* elemente este C_n^2	2p
	$C_n^2=21\Leftrightarrow\frac{n!}{2!\cdot(n-2)!}=21\Leftrightarrow n^2-n-42=0,\ n\in\mathbb{N},n\geq 2$, cu soluția naturală $n=7$.	3p
5.	Vectorii $\vec{u}=m\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt coliniari ddacă $\frac{m}{m-1}=\frac{-3}{2}$,	3p
	adică $5m=3$, de unde $m=\frac{3}{5}$.	2p
6.	$\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=\sin x\cos\frac{\pi}{3}-\cos x\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x$ $\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos x\cos\frac{\pi}{6}+\sin x\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x$	2p 2p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

	Se obține $\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}\sin x-\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos x+\frac{1}{2}\sin x=\sin x, \forall x\in\mathbb{R}$.	1p

Subiectul II **(30 puncte)**

1. a)	Pentru $A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 6 & -4\end{pmatrix}$, calcul direct $I_2+A=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 6 & -3\end{pmatrix}$	2p
	și $(I_2+A)^2=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 6 & -3\end{pmatrix}=I_2+A$.	3p
b)	Calcul : $A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}-3 & 2\\ -6 & 4\end{pmatrix}=-A$	2p
	$A^3=A^2\cdot A=-A\cdot A=-A^2=A$	2p
	Mulțimea $\{A^n \mid n\in\mathbb{N}^*\}=\{-A,A\}$ are 2 elemente.	1p
c)	$\det(23\cdot I_2-A+A^2-A^3+\ldots-A^{23})=\det(23\cdot I_2\underbrace{-A-A-\ldots-A}_{23\,ori})=$	2p
	$=\det(23\cdot I_2-23A)=\det(23(I_2-A))=23^2\begin{vmatrix}-2 & 2\\ -6 & 5\end{vmatrix}=$	2p
	$=2\cdot 23^2=1058$.	1p
2. a)	Calcul direct: $3(x+1)(y+1)-1=3(xy+x+y+1)-1$	3p
	$=3xy+3x+3y+2=x\circ y,\ \forall x,y\in\mathbb{R}$. **Sau** $x\circ y=3xy+3x+3y+3-1=3(xy+x+y+1)-1$ $=3(x+1)(y+1)-1\ \forall x,y\in\mathbb{R}$.	2p 3p 2p
b)	Element neutru: $\exists e\in\mathbb{R}$ $a.\hat{i}.$ $x\circ e=e\circ x=x, \forall x\in\mathbb{R}$. Se obține $e=-\frac{2}{3}\in\mathbb{R}$.	2p
	Elemente simetrizabile: pentru $x\in\mathbb{R},\exists x'\in\mathbb{R}$ $a.\hat{i}.$ $x\circ x'=x'\circ x=-\frac{2}{3}$, se obține $x'=\frac{-9x-8}{9x+9}\in\mathbb{R},\ \forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-1\}$	2p
	Mulțimea elementelor simetrizabile este $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$.	1p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

c)	Se observă că $x \circ (-1) = (-1) \circ x = -1, \forall x = \overline{-10,10}$	3p
	Atunci $(-10) \circ (-9) \circ \ldots \circ 0 \circ 1 \circ \ldots \circ 10 = -1 < 0$.	2p

Subiectul III **(30 puncte)**

1. a)	$\lim\limits_{x \to 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$	1p
	$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}, x \neq -2$	2p
	$f'(1) = \frac{8}{9}$.	2p
b)	$f'(x) = \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2}, \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 3 = 0$ cu soluțiile $x_1 = -3, x_2 = -1$.	2p
	Din tabelul cu semnul derivatei, avem că $x_1 = -3$, geometric $A(-3,-3)$, este punct maxim și $x_2 = -1$, geometric $B(-1,1)$, este punct minim.	3p
c)	Pentru asimptotă orizontală: $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} = +\infty$. Deci nu există asimptotă orizontală.	1p
	Căutăm asimptotă oblică $y = mx + n$ $m = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 + 3x + 3}{x^2 + 2x} = 1 \in \mathbb{R}^*$	2p
	$n = \lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = \lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{x^2 + 3x + 3}{x + 2} - x \right) = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x + 3}{x + 2} = 1 \epsilon \mathbb{R}$ Ecuația asimptotei oblice la $+\infty$ este $y = x + 1$.	2p
2. a)	*F* primitivă a lui *f* dacă *F* derivabilă și $F'(x) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$	1p
	$F'(x) = (e^x(x^2 - 5x + 2))' = e^x(x^2 - 3x - 3) = f(x), \forall x \in \mathbb{R}$.	4p
	Sau calcul direct $\int e^x(x^2 - 3x - 3)dx = e^x(x^2 - 5x + 2) + C = F(x)$.	5p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

b)	Avem $\int_{-2}^{-1} f(x)dx = F(x)\Big\|_{-2}^{-1} = F(-1) - F(-2)$	3p
	$= \dfrac{8e-16}{e^2}$.	2p
c)	$F'(x) = e^x(x^2 - 3x - 3) = f(x),\ x \in \mathbb{R}$ $F''(x) = f'(x) = e^x(x^2 - x - 6),\ x \in \mathbb{R}$	2p
	$F''(x) = 0 \Leftrightarrow e^x(x^2 - x - 6) = 0 \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = 3$.	2p
	Din tabelul de semn al lui $F''(x)$ se obține că punctele de inflexiune ale funcției F sunt $x_1 = -2,\ x_2 = 3$, adică, d.p.v. geometric avem: $A\left(-2, \dfrac{16}{e^2}\right),\ B(3, -4e^3)$.	1p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro