EXAMENUL DE BACALAUREAT 2023
Proba E.c) Matematică M_șt.naturii, Simulare județeană

Filiera teoretică: profilul real, specializarea științele naturii.

• Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.

• Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I (30 puncte)

5p **1.** Calculați $\left(\sqrt{23}+4\right)\cdot\left\{\sqrt{23}\right\}$, unde $\{a\}$ reprezintă partea fracționară a lui a.

5p **2.** Fie funcțiile $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=4x-5,\ g(x)=x+a$.
Determinați $a\in\mathbb{R}$, astfel încât $(f\circ g)(x)=4x+3,\ \forall x\in\mathbb{R}$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2x+1}-26\cdot 5^{x}+5=0$.

5p **4.** Într-un laborator lucrează 12 cercetători dintre care 4 sunt biologi și 8 sunt chimiști. În câte moduri pot fi formate echipe de cercetare formate din 5 cercetători dintre care 3 sunt chimiști?

5p **5.** Determinați $m\in\mathbb{R}$, astfel încât vectorii $\vec{u}=m\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$ să fie ortogonali.

5p **6.** Calculați $tg\,x,\ x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$, dacă se știe că $\sin x=\frac{3}{5}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 puncte)

1. Se consideră matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}$.

5p **a)** Rezolvați ecuația $\det(A-xI_2)=0$.

5p **b)** Demonstrați că, dacă matricea $X\in M_2(\mathbb{R})$ verifică relația $AX=XA$, atunci există numerele $a,b\in\mathbb{R}$ astfel încât X este de forma $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}$.

5p **c)** Arătați că ecuația $X^2=A$ are patru soluții în $M_2(\mathbb{R})$.

2. Pe mulțimea $G=(8,\infty)$ se definește legea de compoziție: $x\circ y=xy-8x-8y+72,\ \forall x,y\in G$.

5p **a)** Demonstrați că G este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție "$\circ$".

5p **b)** Arătați că $(G,\circ)$ este grup abelian.

5p **c)** Demonstrați că funcția $f:(0,\infty)\to G,\ f(x)=x+8$ este izomorfism de la grupul $\left((0,\infty),\cdot\right)$ la grupul $(G,\circ)$.

SUBIECTUL al III-lea (30 puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\ln x-\frac{x-1}{2x}$.

5p **a)** Calculați $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}$.

5p **b)** Arătați că $\ln x\ge\frac{x-1}{2x},\ \forall x\in(1,\infty)$.

5p **c)** Determinați numărul punctelor de inflexiune ale graficului funcției *f*.

2. Fie funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x+2}{x^2+2x+3}$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (x^3+2x^2+3x)\cdot f(x)\,dx=\dfrac{16}{3}$.

5p **b)** Calculați $\int_0^1 \left(f(x)+\dfrac{x}{x^2+2x+3}\right) dx$.

5p **c)** Calculați $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{F(x)}{\ln x}$, unde F este o primitivă a funcției f.

EXAMENUL DE BACALAUREAT NAȚIONAL 2023

Proba E.c) M_*st. naturii*

Simulare județeană

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.
Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

BAREM ORIENTATIV DE EVALUARE

Subiectul I **(30 puncte)**

1.	Avem $16<23<25 \Rightarrow 4<\sqrt{23}<5$, de unde $\left[\sqrt{23}\right]=4$	2p
	Se obține: $\left(\sqrt{23}+4\right)\cdot\left\{\sqrt{23}\right\}=\left(\sqrt{23}+4\right)\cdot\left(\sqrt{23}-\left[\sqrt{23}\right]\right)=\left(\sqrt{23}+4\right)\cdot\left(\sqrt{23}-4\right)=7$.	3p
2.	$(f\circ g)(x)=f(g(x))=4g(x)-5=4(x+a)-5=4x+4a-5$	3p
	$(f\circ g)(x)=4x-3 \Leftrightarrow 4x+4a-5=4x+3$, de unde $a=2$.	2p
3.	$5^{2x+1}-26\cdot 5^x+5=0 \Leftrightarrow 5\cdot 5^{2x}-26\cdot 5^x+5=0$. Notăm $5^x=t>0 \Rightarrow 5t^2-26t+5=0$	2p
	Se obține $t_1=\frac{1}{5} \Rightarrow 5^x=\frac{1}{5}$, de unde $x_1=-1$ și $t_2=5 \Rightarrow 5^x=5$, de unde $x_2=1$.	3p
4.	Se pot forma $C_4^2=6$ echipe de câte 2 biologi și $C_8^3=56$ echipe de câte 3 chimiști	3p
	Se pot forma echipe de câte 5 cercetători în număr de $C_4^2\cdot C_8^3=336$ moduri.	2p
5.	Vectorii $\vec{u}=m\vec{i}-3\vec{j}$ și $\vec{v}=(m-1)\vec{i}+2\vec{j}$ sunt ortogonali dacă și numai dacă $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Leftrightarrow m(m-1)-6=0$,	3p
	adică $m^2-m-6=0$, cu soluțiile $m_1=-2$ și $m_2=3$.	2p
6.	Din $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ se obține $\lvert\cos x\rvert=\sqrt{1-\sin^2 x}$. Pentru $x\in\left(\frac{\pi}{2},\pi\right)$ avem $\cos x=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\sqrt{\frac{16}{25}}=-\frac{4}{5}$	3p
	Avem $tgx=\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{3}{4}$.	2p

Subiectul II **(30 puncte)**

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

1. a)	Avem $A-xI_2=\begin{pmatrix}1-x & 0\\ 0 & 9-x\end{pmatrix}$,	2p
	de unde $\det(A-xI_2)=0 \Leftrightarrow (1-x)(9-x)=0$	2p
	$x_1=1,\ x_2=9$	1p
b)	Fie $X=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})$. Din $AX=XA \Leftrightarrow \begin{pmatrix}a & b\\ 9c & 9d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & 9b\\ c & 9d\end{pmatrix}$	2p
	$\Rightarrow 9b=b \ si\ 9c=c \Rightarrow b=c=0,\ a,d \overset{not}{=} b\in\mathbb{R}$	2p
	Se obține $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix},\ a,b\in\mathbb{R}$.	1p
c)	$X^2=A \Leftrightarrow X^3=AX\ si\ X^3=XA$, deci $AX=XA$	2p
	Din punctul b) avem $X=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\Rightarrow X^2=\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}$	1p
	$\begin{pmatrix}a^2 & 0\\ 0 & b^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 9\end{pmatrix}\Rightarrow a^2=1$ și $b^2=9$, de unde $a\in\{-1,1\}$, $b\in\{-3,3\}$,	1p
	adică există $2^2=4$ matrice, care sunt soluții ale ecuației.	1p
2. a)	G este parte stabilă dacă $\forall x,y\in G \Rightarrow x\circ y\in G$ Din $x\in G \Leftrightarrow x\in(8,\infty)\Leftrightarrow x>8 \Leftrightarrow x-8>0$ și $y\in G \Leftrightarrow y\in(8,\infty)\Leftrightarrow y>8 \Leftrightarrow y-8>0$	3p
	se obține $(x-8)(y-8)>0 \Leftrightarrow xy-8x-8y+64>0$,	1p
	adică $xy-8x-8y+72>8 \Leftrightarrow x\circ y\in G$.	1p
b)	Asociativitate, Comutativitate	1p
	Element neutru: $\exists e\in G\ a.î.\ x\circ e=e\circ x=x,\ \forall x\in G$. Se obține $e=9\in G$.	2p
	Elemente simetrizabile: $\forall x\in G, \exists x'\in G\ a.î.\ x\circ x'=x'\circ x=9$, se obține $x'=\frac{8x-63}{x-8}=8+\frac{1}{x-8}\in G,\ \forall x>8$.	2p
c)	Injectivitate: $\forall x_1,x_2\in(0,\infty),\ f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$, adică $x_1+8=x_2+8\Rightarrow x_1=x_2$	2p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

	Surjectivitate: $\forall y \in G, \exists x \in (0,\infty)$ a.î. $f(x) = y$, adică $x+8 = y \Rightarrow x = y-8 > 0$	1p
	Funcția f este morfism: Din $f(x\cdot y) = xy+8$ și $f(x)\circ f(y) = (x+8)\circ(y+8) = xy+8$ se obține $f(x\cdot y) = f(x)\circ f(y), \forall x,y \in (8,\infty)$.	2p

Subiectul III **(30 puncte)**

1. a)	$f'(x) = \left(\ln x - \frac{x-1}{2x}\right)' = \frac{1}{x} - \frac{(x-1)'\cdot 2x - (x-1)\cdot(2x)'}{(2x)^2} = \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x-1}{2x^2},\ x \in (0,\infty)$	2p
	$\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = f'(1)$	2p
	Se obține că $\lim\limits_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{1}{2}$.	1p
b)	Inegalitatea se scrie: $\ln x - \frac{x-1}{2x} \geq 0,\ \forall x \in [1,\infty)$ și fie $g:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ g(x) = \ln x - \frac{x-1}{2x}$	2p
	Avem $g'(x) = \frac{2x-1}{2x^2},\ x\in[1,\infty)$ și din tabelul de semn al derivatei funcției g avem că g este funcție crescătoare și $g(x) \geq 0,\ \forall x \in [1,\infty]$.	2p
	$g(x)\geq 0 \Leftrightarrow \ln x - \frac{x-1}{2x} \geq 0 \Leftrightarrow \ln x \geq \frac{x-1}{2x},\ \forall x\in[1,\infty]$.	1p
c)	$f''(x) = \left(\frac{2x-1}{2x^2}\right)' = \frac{1-x}{x^3},\ x\in(0,\infty)$	2p
	$f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1-x}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 1$.	1p
	Din tabelul cu semnul derivatei a doua avem că pentru $x\in(0,1)$ avem $f''(x) > 0$, adică funcția f este convexă și pentru $x\in(1,\infty)$ avem $f''(x) < 0$, adică funcția f este concavă. Deci graficul funcției are un punct de inflexiune, $P(1,0)$.	2p
2. a)	$\int_1^2 (x^3+2x^2+3x)\cdot f(x)\,dx = \int_1^2 x(x^2+2x+3)\cdot\frac{x+2}{x^2+2x+3}\,dx = \int_1^2 (x^2+2x)\,dx$	2p
	$= \left(\frac{x^3}{3}+x^2\right)\Big\vert_1^2 = \frac{16}{3}$.	3p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro

b)	$\int_0^1 \left(f(x) + \frac{x}{x^2+2x+3} \right) dx = \int_0^1 \left(\frac{x+2}{x^2+2x+3} + \frac{x}{x^2+2x+3} \right) dx = \int_0^1 \frac{2x+2}{x^2+2x+3} dx$	2p
	$= \int_0^1 \frac{(x^2+2x+3)'}{x^2+2x+3} dx = \ln(x^2+2x+3) \Big\|_0^1$	2p
	$= \ln 2$.	1p
c)	$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\ln x} \overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=} \lim\limits_{x\to\infty} \frac{F'(x)}{(\ln x)'}$	2p
	$= \lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to\infty} xf(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2+2x}{x^2+2x+3}$	2p
	$=1$.	1p

Str. Gh. Baritiu nr. 2, 330065 - DEVA, jud. HUNEDOARA
Tel: +4 (0) 254213315, +4 (0) 254215755
inspectorat@isj.hd.edu.ro, http://isj.hd.edu.ro