



EXAMENUL DE BACALAUREAT 2023

Proba E.c) Matematică M_mate-info, Simulare județeană

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul efectiv de lucru este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Demonstrați că $10^{\lg 2} + \sqrt[3]{-64} + \left[\frac{123}{7}\right] = 15$, unde $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x .
- 5p 2. Fie funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$. Demonstrați că numărul $f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(30)$ este pătrat perfect.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $2x + 1 + 2\sqrt{2x + 1} = 15$.
- 5p 4. Câte numere naturale de forma $\overline{ab2c}$ au suma cifrelor egală cu 5?
- 5p 5. În triunghiul ABC , punctele M , N și P sunt mijloacele laturilor BC , AC , respectiv AB . Arătați că $\overline{AM} + \overline{BN} + \overline{CP} = \vec{0}$.
- 5p 6. În triunghiul ABC măsurile unghiurilor A și B sunt de 45° , respectiv 105° și $AB = 3\sqrt{3}$. Calculați lungimea laturii BC .

SUBIECTUL II

(30 puncte)

1. Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Să se calculeze rang A .
- 5p b) Să se arate că $A^n = 14^{n-1} A$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$.
- 5p c) Să se arate că inversa matricei $I_3 - A$ este $I_3 - \frac{1}{13} A$.
2. Pe \mathbb{R} considerăm legea " \circ " definită prin $x \circ y = 5xy - 30x - 30y + 186$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$. Se știe că această lege este asociativă și comutativă.
- 5p a) Demonstrați că $x \circ y = 5(x - 6)(y - 6) + 6$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$;
- 5p b) Determinați un element $a \in \mathbb{R}$ pentru care $x \circ a = a \circ x = a$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$;
- 5p c) Dacă d_1, d_2, \dots, d_n sunt divizorii întregi ai numărului 2022 calculați $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n$.



SUBIECTUL III

(30 puncte)

1. Se consideră funcția $f : (1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2}{x-1}$.
- 5p a) Demonstrați că ecuația $f'(x) = 0$ are o singură soluție în intervalul $(1, \infty)$;
- 5p b) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f ;
- 5p c) Demonstrați că $f(\lg 99) + f(\lg 101) < f(\lg 97) + f(\lg 103)$.
2. Fie funcția $f_{p,q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f_{p,q}(x) = (\sin x)^p \cdot (\cos x)^q$, unde $p, q \in \mathbb{N}^*$.
- 5p a) Demonstrați că funcția $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = -\frac{1}{4} \cos 2x$ este o primitivă a funcției $f_{1,1}$;
- 5p b) Calculați $\int_0^{\pi/2} f_{3,1}(x) dx$;
- 5p c) Fie F o primitivă a funcției $f_{2022,2023}$. Demonstrați că există un număr real k astfel încât $F(x+2\pi) - F(x) = k$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.



EXAMENUL DE BACALAUREAT NAȚIONAL 2023

Proba E.c) *M_mate-info*

Simulare județeană

BAREM DE NOTARE ȘI EVALUARE

Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.

Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.

Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

1.	$10^{\lg 2} = 2$, $\sqrt[3]{-64} = -4$, $\left[\frac{123}{7}\right] = 17$; Apoi obținem concluzia.	3p 2p
2.	$f(1) + f(2) + f(3) + \dots + f(30) = 1 + 3 + 5 + \dots + 59$ $1 + 3 + 5 + \dots + 59 = \frac{(1+59) \cdot 30}{2} = 30^2$.	3p 2p
3.	Condiția $2x + 1 \geq 0$ de unde $x \geq -\frac{1}{2}$ Notăm $\sqrt{2x+1} = a$, $a \geq 0$. Ecuația devine $a^2 + 2a - 15 = 0$ cu soluțiile $a_1 = 3$ și $a_2 = -5$, cea din urmă nu convine. Din $\sqrt{2x+1} = 3$ deducem $x = 4$.	1p 2p 2p
4.	Din $a + b + 2 + c = 5$ deducem $a + b + c = 3$. Numerele sunt 3020, 2120, 2021, 1220, 1121, 1022. Sunt 6 numere.	2p 2p 1p
5.	Din regula triunghiului avem $\overline{AM} = \overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{BC}$, $\overline{BN} = \overline{BC} + \frac{1}{2}\overline{CA}$ și $\overline{CP} = \overline{CA} + \frac{1}{2}\overline{AB}$. Concluzia se obține prin însumarea acestor relații.	3p 2p
6.	Avem $m(\sphericalangle C) = 30^\circ$. Teorema sinusurilor ne conduce la $\frac{AB}{\sin C} = \frac{BC}{\sin A}$, de unde $\frac{AB}{1/2} = \frac{BC}{\sqrt{2}/2}$; Obținem $BC = 3\sqrt{6}$.	1p 2p 2p



SUBIECTUL II

(30 puncte)

1. a)	$\text{rang } A \leq 3. \text{ Din } \det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 0 \text{ (linii și coloane proporționale) avem că } \text{rang } A \leq 2$ <p>Există $C_3^2 \cdot C_3^2 = 9$ minori de ordinul 2 și toți sunt nuli având linii, resp coloane proporționale. Deoarece $A \neq O_3$ și din cele de mai sus rezultă că $\text{rang } A = 1$</p>	<p>3p</p> <p>1p</p> <p>1p</p>
1. b)	<p>Calcul $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 14 & 28 & 42 \\ 28 & 56 & 84 \\ 42 & 84 & 126 \end{pmatrix} = 14A$</p> <p>Inducție matematică: Pp că $P(k): A^k = 14^{k-1} A$ adevărată.</p> <p>$P(k) \rightarrow P(k+1)$,</p> <p>$P(k+1): A^{k+1} = 14^k A$</p> <p>$A^{k+1} = A^k A = 14^{k-1} A^2 = 14^k A.$</p> <p>Rezultă că $A^n = 14^{n-1} A, \forall n \in \mathbb{N}^*$</p>	<p>2p</p> <p>2p</p> <p>1p</p>
1. c)	<p>Matricea $I_3 - \frac{1}{13} A$ este inversa matricei $I_3 - A$ dacă $(I_3 - A) \left(I_3 - \frac{1}{13} A \right) = I_3$</p> <p>Prin calcul avem $(I_3 - A) \left(I_3 - \frac{1}{13} A \right) = I_3 - A - \frac{1}{13} A + \frac{1}{13} A^2 = I_3 - A - \frac{1}{13} A + \frac{14}{13} A = I_3$</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2. a)	<p>Verificare prin calcul direct.</p>	<p>5p</p>
2. b)	<p>Din $x \circ a = a$ obținem $(a-6)(5(a-6)-1) = 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.</p> <p>Obținem $a = 6$.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>
2. c)	<p>Pe baza criteriilor de divizibilitate cu 2 și 3, obținem că 6 e divizor al lui 2022.</p> <p>Folosind proprietățile operației din enunț obținem $d_1 \circ d_2 \circ \dots \circ d_n = 6$.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>



SUBIECTUL III

(30 puncte)

<p>1. a)</p>	<p>Avem $f'(x) = \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$.</p> <p>Soluția unică a ecuației $f'(x) = 0$ este $x = 2$.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>												
<p>1. b)</p>	<p>Avem următorul tabel de variație</p> <table border="1" data-bbox="203 562 824 772"> <tr> <td>x</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>∞</td> </tr> <tr> <td>$f'(x)$</td> <td>- - - - -</td> <td>0</td> <td>+ + + + +</td> </tr> <tr> <td>$f(x)$</td> <td> \ \ \ \ \</td> <td>4</td> <td>\ \ \ \ \</td> </tr> </table> <p>Funcția este strict descrescătoare pe $(1, 2]$ și strict crescătoare pe $[2, \infty)$.</p>	x	1	2	∞	$f'(x)$	- - - - -	0	+ + + + +	$f(x)$	\ \ \ \ \	4	\ \ \ \ \	<p>3p</p> <p>2p</p>
x	1	2	∞											
$f'(x)$	- - - - -	0	+ + + + +											
$f(x)$	\ \ \ \ \	4	\ \ \ \ \											
<p>1. c)</p>	<p>Deoarece $\lg 97 < \lg 99 < 2$ obținem $f(\lg 99) < f(\lg 97)$.</p> <p>Deoarece $\lg 103 > \lg 101 > 2$ obținem $f(\lg 101) < f(\lg 103)$ și apoi obținem concluzia.</p>	<p>2p</p> <p>3p</p>												
<p>2. a)</p>	<p>Avem $g'(x) = \frac{1}{2} \sin 2x$</p> <p>$= \sin x \cos x = f_{1,1}(x)$.</p>	<p>3p</p> <p>2p</p>												
<p>2. b)</p>	<p>$\int_0^{\pi/2} f_{3,1}(x) dx = \int_0^{\pi/2} (\sin x)^3 \cos x dx$.</p> <p>Prin integrarea prin părți sau schimbare de variabilă obținem rezultatul final $\frac{1}{4}$.</p>	<p>1p</p> <p>4p</p>												
<p>2. c)</p>	<p>Fie $h(x) = F(x + 2\pi) - F(x)$. Atunci $h'(x) = f_{2022,2023}(x + 2\pi) - f_{2022,2023}(x) = 0$.</p> <p>Deducem că funcția h este constantă și apoi concluzia.</p>	<p>4p</p> <p>1p</p>												