

Inspectoratul Școlar Județean Dolj  
**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Simulare județeană**  
**Proba Ec)**  
**Matematică *M\_șt-nat***

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p** 1. Arătați că  $\frac{1-i}{1+2i} + \frac{1+i}{1-2i} < 0$ .
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 - 2mx + 2m + 2$ , unde  $m$  este un parametru real. Determinați numerele reale  $m$  pentru care vârful parabolei asociate funcției  $f$  are coordonatele egale.
- 5p** 3. Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $2 \log_3(x + 5) + 1 = \log_3 75$ .
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca alegând un număr natural par de trei cifre acesta să aibă suma cifrelor 9 sau 18.
- 5p** 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(2,1)$  și  $B(3,4)$ . Determinați ecuația dreptei  $d$  care trece prin punctul  $P(3,3)$  și este paralelă cu dreapta  $AB$ .
- 5p** 6. Dacă  $a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$  și  $\sin a = \frac{3}{5}$  arătați că  $3 \sin x + 4 \cos x + 5 \cos(a + x) = 0$ , pentru orice  $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricile  $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ ,  $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  și  $X(a) = I_3 + aA$ ,  $a \in \mathbb{R}$ .
- 5p** a) Arătați că  $\det X(1) = 16$ .
- 5p** b) Arătați că pentru orice numere reale  $a$  și  $b$  avem  $X(a) \cdot X(b) = X(a + b + 3ab)$ .
- 5p** c) Determinați numerele naturale  $m$  și  $n$  pentru care  $X(m) \cdot X(n) = X(9)$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale strict pozitive se definește legea de compoziție  $x * y = x^{\ln \sqrt[3]{y}}$ .
- 5p** a) Arătați că  $2 * 1 = 1$ .
- 5p** b) Demonstrați că  $e^3$  este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale pozitive ecuația  $x * x = e^3$ .

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Fie funcția  $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ .
- 5p** a) Arătați că  $f'(x) = \frac{x-1}{(x+1)^2 \sqrt{x^2+1}}$ , pentru orice  $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ .
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei orizontale la graficul funcției  $f$  către  $-\infty$ .
- 5p** c) Determinați imaginea funcției,  $\text{Im}f$ .
2. Se consideră funcțiile  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x$  și  $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ .
- 5p** a) Determinați numerele reale  $a, b, c$ , știind că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p** b) Determinați primitiva  $G$  a funcției  $g(x) = f(x) - 2e^x$ ,  $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , cu proprietatea că graficul lui  $G$  conține punctul  $A(0, 2)$ .
- 5p** c) Demonstrați că  $\frac{e^2-1}{e^2} \leq \int_{-2}^0 f(x) dx \leq \frac{2e^2-2}{e^2}$ .

**Examenul național de bacalaureat 2023**  
**Simulare județeană**  
**Proba Ec)**  
**Matematică M\_șt-nat**  
**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Varianta 1**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

<b>1.</b>	$\frac{1-i}{1+2i} + \frac{1+i}{1-2i} = \frac{2+4i^2}{5} =$ $\frac{2-4}{5} = -\frac{2}{5} < 0.$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>2.</b>	Dacă vârful parabolei are coordonatele egale atunci $m = -\frac{4m^2-8(m+1)}{4}$ $\Leftrightarrow m^2 - m - 2 = 0 \Leftrightarrow m \in \{-1, 2\}.$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>3.</b>	Trebuie ca $x + 5 > 0.$ $2 \log_3(x + 5) + 1 = \log_3 75 \Leftrightarrow \log_3 3(x + 5)^2 = \log_3 75 \Leftrightarrow (x + 5)^2 = 25$ $\Leftrightarrow x + 5 = \pm 5 \Rightarrow x = 0$ soluție.	<b>1p</b>
		<b>2p</b>
<b>4.</b>	Numere pare de 3 cifre sunt 450. Dacă suma cifrelor este 9 sau 18 numărul va fi divizibil cu 9. Numere pare de 3 cifre divizibile cu 9 sunt 50. Probabilitatea este egală cu $\frac{50}{450} = \frac{1}{9}.$	<b>2p</b>
		<b>2p</b>
		<b>1p</b>
<b>5.</b>	Dacă $d \parallel AB \Leftrightarrow m_d = m_{AB} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 3.$ $d: y - y_P = m_d(x - x_P) \Leftrightarrow d: 3x - y - 6 = 0.$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>6.</b>	$a \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ și $\sin a = \frac{3}{5} \Rightarrow \cos a = -\frac{4}{5}.$ $5 \cos(a + x) = 5 \cos a \cos x - 5 \sin a \sin x = -4 \cos x - 3 \sin x$ de unde $3 \sin x + 4 \cos x + 5 \cos(a + x) = 0$ , pentru orice $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$X(1) = I_3 + A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$ $\det X(1) = 16$	<b>2p</b>
		<b>3p</b>
<b>b)</b>	$X(a) \cdot X(b) = (I_3 + aA)(I_3 + bA) = I_3 + aA + bA + abA^2$ Dar $A^2 = 3A$ deci $X(a) \cdot X(b) = I_3 + aA + bA + 3abA = X(a + b + 3ab).$	<b>3p</b>
		<b>2p</b>
<b>c)</b>	$X(m) \cdot X(n) = X(9) \Leftrightarrow m + n + 3mn = 9 \Leftrightarrow m = \frac{9-n}{1+3n} \Leftrightarrow 3m = \frac{28}{1+3n} - 1 \in \mathbb{N}$	<b>3p</b>

	$\Leftrightarrow 1 + 3n \in \{1, 2, 4, 7, 14, 28\} \Rightarrow n \in \{0, 1, 2, 9\}$ și soluțiile sunt $(m, n) = \{(9, 0); (2, 1); (1, 2), (0, 9)\}$ .	2p
2.a)	$2 * 1 = 2^{\ln \sqrt[3]{1}}$ $= 2^0 = 1$	3p 2p
b)	$x * e^3 = x^{\ln \sqrt[3]{e^3}} = x^{\ln e} = x, \forall x > 0$ . $e^3 * x = e^{3 \ln \sqrt[3]{x}} = e^{\ln x} = x, \forall x > 0$ deci $e^3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.	2p 3p
c)	$x * x = e^3 \Leftrightarrow x^{\frac{\ln x}{3}} = e^3 \Leftrightarrow (\ln x)^2 = 9 \Leftrightarrow$ $\ln x = \pm 3 \Rightarrow x \in \{e^3, e^{-3}\}$ .	3p 2p

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}(x+1) - \sqrt{x^2+1}}{(x+1)^2} = \frac{x^2+x-(x^2+1)}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}} =$ $= \frac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}}$ .	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ x  \cdot \sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x(1+\frac{1}{x})} = -1$ . Dreapta $y = -1$ este asimptota la graficul funcției $f$ către $-\infty$ .	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ Alcătuirea tabelului de variație al funcției (semnul derivatei, monotonia funcției, limitele laterale în -1, limitele la $\pm\infty$ ) Determinarea punctului de minim, $x=1$ punct de minim local $\text{Imf} = (-\infty, -1) \cup [\frac{\sqrt{2}}{2}, +\infty)$	1p 2p 1p 1p
2.a)	F este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = (x^2 + 2x + 2)e^x$ , pentru $\forall x \in \mathbf{R}$ $F'(x) = [ax^2 + (2a+b)x + b + c]e^x \Rightarrow a=1, b=0$ și $c=2$ .	2p 3p
b)	$G(x) = \int g(x)dx = \int (x^2 + 2x)e^x dx$ rezultă $G(x) = x^2e^x + C$ $G(0) = 2$ , obținem $G(x) = x^2e^x + 2$	3p 2p
c)	Pentru $x \in [-2, 0]$ obținem $1 \leq x^2 + 2x + 2 \leq 2 \Rightarrow e^x \leq f(x) \leq 2e^x$ Rezultă $\int_{-2}^0 e^x dx \leq \int_{-2}^0 f(x)dx \leq \int_{-2}^0 2e^x dx$ și $\int_{-2}^0 e^x dx = \frac{e^2-1}{e^2}$ .	3p 2p