Examenul național de bacalaureat 2023
Simulare județeană
Proba Ec)
Matematică *M_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Dacă $z^2 + z + 1 = 0$, unde z este număr complex, arătaţi că $z^{2023} + \frac{1}{z^{2023}} = -1$.

5p **2.** Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \{2023x\}$, unde $\{x\}$ reprezintă partea fracționară a lui x. Arătați că $f\left(x + \frac{1}{2023}\right) = f(x)$, pentru orice număr real x.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 5 \cdot 2^x + 4 = 0$.

5p **4.** Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre , aceasta să nu conțină cifra 2.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră trapezul $ABCD$ cu $AB \parallel CD$ și $A(1,2)$, $B(4,5)$ și $D(-3,2)$. Determinați ecuația dreptei MN, știind că segmentul MN este linie mijlocie a trapezului $ABCD$.

5p **6.** Știind că $\text{tg}a = \sqrt{3}$ și $a \in \mathbb{R}$, arătați că $\frac{\sin a - \cos a}{\sin a + \cos a} = 2 - \sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II- lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^x \end{pmatrix}$, unde x este un număr real.

5p **a)** Determinați $\det(A(10))$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui x, știind că $A(x) \cdot A(2x) = A(x^2 + 2)$.

5p **c)** Știind că $A(n) = A(1) \cdot A(2) \cdot \ldots \cdot A(2022)$, demonstrați că n este număr natural divizibil cu 2023.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție:
$x * y = 3xy - 3x - 3y + 4$. Legea „$*$" este asociativă și are element neutru.

5p **a)** Arătați că $x * y = 3(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Calculați $\frac{1}{1011} * \frac{2}{1011} * \frac{3}{1011} * \ldots * \frac{2023}{1011}$.

5p **c)** Determinați numerele reale x care sunt egale cu simetricele lor față de legea „$*$".

SUBIECTUL al III- lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcţia $f: \mathbb{R} - \{-2\} \to \mathbb{R}$, definite prin $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x + 2}$.

5p **a)** Determinaţi ecuaţiile asimptotelor la graficul funcţiei f.

5p **b)** Determinaţi punctele de extrem local ale funcţiei f.

5p **c)** Se consideră şirul $(a_n)_{n \geq 1}, a_1 = 2\ și\ a_{n+1} = f(a_n), pentru\ n \geq 1, n \in N$. Studiaţi convergenţa şirului $(a_n)_{n \geq 1}$ şi în caz de convergenţă, calculaţi limita şirului.

2. Se consideră funcţiile $f, F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = arctgx, F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

5p **a)** Arătaţi că funcţia F este convexă pe **R**.

5p **b)** Determinaţi primitiva G a funcţiei g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, g(x)=xf(x) cu proprietatea că graficul lui G contine punctul A(1,$-\frac{1}{2}$).

5p **c)** Calculaţi $\lim_{x \to 0} \frac{F(x^2)}{x^4}$.

Examenul național de bacalaureat 2023
Simulare județeană
Proba Ec)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctaj corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total obținut pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$z^2+z+1=0 \Rightarrow z^3=1$ $z^{2023}=(z^3)^{674}\cdot z=z$, de unde obținem $z^{2023}+\frac{1}{z^{2023}}=z+\frac{1}{z}=-1$.	**2p** **3p**
2.	$f\left(x+\frac{1}{2023}\right)=\left\{2023\left(x+\frac{1}{2023}\right)\right\}=\{2023x+1\}$ $=\{2023x\}=f(x)$, pentru orice număr real x.	**3p** **2p**
3.	$(2^x-1)(2^x-4)=0 \Leftrightarrow 2^x=1$ sau $2^x=4$ $x=0$ sau $x=2$.	**3p** **2p**
4.	Sunt $8\cdot 9=72$ de numere naturale de două cifre care nu conțin cifra 2, deci sunt 72 de cazuri favorabile. Sunt 90 de numere natural de două cifre, deci sunt 90 de cazuri posibile. $P=\frac{\text{nr.cauri favorabile}}{\text{nr.cazuri posibile}}=\frac{72}{90}=\frac{4}{5}$.	**2p** **1p** **2p**
5.	$M(-1,2)$, unde M este mijlocul segmentului AD, $m_{AB}=1$. Cum MN este paralelă cu AB, ecuația dreptei MN este $MN: x-y+3=0$.	**3p** **2p**
6.	$\frac{\sin a-\cos a}{\sin a+\cos a}=\frac{\cos a\left(\frac{\sin a}{\cos a}-1\right)}{\cos a\left(1+\frac{\sin a}{\cos a}\right)}=\frac{\text{tg}a-1}{1+\text{tg}a}=$ $=\frac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}}=2-\sqrt{3}$.	**3p** **2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(10)=\begin{pmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{pmatrix} \Rightarrow \det\big(A(10)\big)=\begin{vmatrix}1 & 10 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^{10}\end{vmatrix}=$ $=2^{10}=1024$.	**2p** **3p**
b)	$A(x)\cdot A(2x)=A(3x)$ $A(3x)=A(x^2+2) \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x_1=1$ și $x_2=2$.	**2p** **3p**
c)	Deoarece $A(x)\cdot A(y)=A(x+y)$ pentru orice numere reale x și y, obținem $A(n)=A(1)\cdot A(2)\cdot \ldots \cdot A(2022)=A(1+2+\cdots+2022)=A(2023\cdot 1011)$, n=$2023\cdot 1011$, deci n este număr natural divizibil cu 2023.	 **3p** **2p**
2.a)	$x*y=3xy-3x-3y+4=3(xy-x-y+1)+1=$ $=3(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.	**3p** **2p**
b)	$x*1=1*y=1$, pentru orice numere reale x,y. $\frac{1}{1011}*\frac{2}{1011}*\frac{3}{1011}*\ldots*\frac{2023}{1011}=$	**2p**

	$=\left(\frac{1}{1011} * \frac{2}{1011} * \ldots * \frac{1010}{1011}\right) * \frac{1011}{1011} * \left(\frac{1012}{1011} * \frac{1013}{1011} * \ldots * \frac{2032}{1011}\right) = 1.$	3p
c)	Elementul neutru este $\frac{4}{3}$. $x * x = \frac{4}{3} \Leftrightarrow 3(x-1)^2 + 1 = \frac{4}{3} \Leftrightarrow (x-1)^2 = \frac{1}{9}$. $x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = \frac{4}{3}$	2p 2p 1p

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	Calculul limitelor laterale în x = -2, dreapta x = -2 asimptotă verticală Graficul funcţiei nu are asimptotă orizontală la $\pm\infty$ $m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = 1, n = \lim_{x\to\infty}(f(x) - x) = -1, y = x - 1$ *asimptotă oblică la* $+\infty$ Analog, $y = x - 1$ *asimptotă oblică la* $-\infty$	2p 1p 1p 1p
b)	*Calculul derivatei* $f'(x) = \frac{x^2+4x+1}{(x+2)^2}$ $f'(x) = 0$ implică $x_{1,2} = -2 \pm \sqrt{3}$ Din tabelul de variaţie al funcţiei rezultă $x_1=-2-\sqrt{3}$ este punct de maxim local şi $x_2=-2+\sqrt{3}$ este punct de minim local	2p 1p 2p
c)	Se demonstrează prin inducţie matematică că $a_n > 1, \forall n \geq 1$ Se deduce că şirul este descrescător $a_n > a_{n+1}$, *funcția f strict crescătoare pe* $(1, +\infty)$ *implică* $f(a_n) > f(a_{n+1})$ *deci* $a_{n+1} > a_{n+2}$ Şirul este mărginit $1 < a_n \leq 2, \forall n \geq 1$ Şirul este monoton şi mărginit rezultă şir convergent , deci există $\lim_{n\to\infty} a_n = l$. Trecând la limită în *relația* $a_{n+1} = f(a_n)$, obţinem $\lim_{n\to\infty} a_n = 1$.	2p 2p 1p
2.a)	*F primitiva lui f rezultă* $F'(x) = \operatorname{arctg} x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. $F''(x) = \frac{1}{1+x^2} > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Deci functia F este convexă pe $\mathbb{R}$.	2p 3p
b)	$G(x) = \int xf(x)dx = \int xarctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{1+x^2}dx$ $\int \frac{x^2}{1+x^2}dx = \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx = \int (1 - \frac{1}{x^2+1})dx = x - arctgx + C$ $G(x) = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}(x - arctgx) + C, G(1) = -\frac{1}{2}, deci\ C = -\frac{\pi}{4}$.	2p 2p 1p
c)	$\lim_{x\to 0} \frac{F(x^2)}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t)dt}{x^4} = \lim_{x\to 0} \frac{2xf(x^2)}{4x^3} =$ $\frac{1}{2}\lim_{x\to 0} \frac{arctgx^2}{x^2} = \frac{1}{2}$.	3p 2p