

Simulare județeană a Examenului național de bacalaureat 2023  
Ianuarie 2023  
Proba E.c) - Matematică M\_tehnologic  
Varianta 1

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

**SUBIECTUL I****(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $(\sqrt[3]{27} + \log_2 8) : 6 = 1$ .
- 5p 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = x^2 + x + m$ ,  $m \in \mathbb{R}$ . Determinați numerele reale  $m$  pentru care graficul funcției  $f$  **nu** intersectează axa  $Ox$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\sqrt{x} = 2 - x$ .
- 5p 4. Într-o urnă sunt doar bile roșii, galbene și albastre astfel: 10 bile **nu** sunt albastre, 14 bile **nu** sunt roșii și 16 bile **nu** sunt galbene. Calculați probabilitatea ca extrăgând o bilă din urnă, aceasta să **nu** fie nici roșie, nici galbenă.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctele  $A(-1, 2)$ ,  $B(1, -1)$  și  $C(m, 2 - m)$ , unde  $m$  este un număr real. Determinați numărul real  $m$ , știind că punctele  $A$ ,  $B$ ,  $C$  sunt coliniare.
- 5p 6. Calculați lungimea laturii  $AB$  a triunghiului ascuțitunghic  $ABC$ , știind că  $AC = 4$ ,  $BC = \sqrt{13}$  și  $\cos A = \frac{1}{2}$ .

**SUBIECTUL al II-lea****(30 de puncte)**

- 5p 1. Fie  $A(a) = \begin{pmatrix} a-1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$  și sistemul de ecuații  $\begin{cases} (a-1)x + y = -2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ , unde  $a$  este un număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0)) = -1$ .
- 5p b) Demonstrați că matricea  $A(-2)$  este inversabilă.
- 5p c) Pentru  $a = 2$ , determinați soluția sistemului de ecuații.
2. Pe mulțimea numerelor întregi se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = xy + 5x + 5y + 20$ .
- 5p a) Arătați că  $1 * (-5) = -5$ .
- 5p b) Demonstrați că  $e = -4$  este elementul neutru al legii de compoziție „\*”.
- 5p c) Calculați  $(-2023) * (-2022) * (-2021) * \dots * (-1)$ .

**SUBIECTUL al III-lea****(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = (x^2 - 3)e^x$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = (x^2 + 2x - 3)e^x$ ,  $x \in \mathbb{R}$ .
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei spre  $+\infty$  la graficul funcției  $f$ .
- 5p c) Demonstrați că  $x^2 + 2e^{1-x} \geq 3$  pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ .
2. Se consideră funcțiile  $f, F: 1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = \ln x - \frac{1}{x}$  și  $F(x) = (x - 1) \ln x - x + 2023$ .
- 5p a) Să se arate că funcția  $F$  este o primitivă a funcției  $f$ .
- 5p b) Să se calculeze  $\int \left( f(x) + \frac{1}{x} \right) dx$ .
- 5p c) Să se calculeze  $\int f(x) F^2(x) dx$ .



**Simularea examenului național de bacalaureat 2023**

**Barem de evaluare și notare**

**Matematică *M\_tehnologic***

*Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu.

Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I (30 de puncte)**

1.	$(\sqrt[3]{27} + \log_2 8) : 6 = (3 + 3) : 6 =$ $= 6 : 6 = 1$ „adevărat”	3p 2p
2.	$G_f \cap Ox = \emptyset$ dacă $f(x) = 0$ are nu soluții, $\Delta < 0$ $1 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \frac{1}{4}, m \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$	2p 3p
3.	$x = (2 - x)^2 \Rightarrow x^2 - 5x + 4 = 0$ $x_1 = 4$ (nu convine), $x_2 = 1$ , final $x = 1 \in \square$	2p 3p
4.	Notând cu $r, g$ respectiv $a$ numărul de bile roșii, galbene și albastre, obținem $r + g = 10, g + a = 14,$ $r + a = 16$ $r + g + a = 20$ , de unde $a = 10, P = \frac{10}{20} = \frac{1}{2}$	2p 3p
5.	$A, B, C$ coliniare $\Leftrightarrow m_{AB} = m_{AC}$ $\frac{-3}{2} = \frac{-m}{m+1}, m = -3 \in \mathbb{R}$	2p 3p
6.	Teorema cosinusului pentru $BC : a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ , obține ecuația $13 = 16 + c^2 - 4c \Leftrightarrow$ $c^2 - 4c + 3 = 0, c_1 = 1, c_2 = 3$ , triunghi ascuțitunghic, valoarea $c_1 = 1$ nu convine, $c = 3$ adică $AB = 3$	2p 3p

**SUBIECTUL II (30 de puncte)**

1. a)	$A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ $\det(A(0)) = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-2) - 1 \cdot 3 = -1$	2p 3p
b)	$A(-2) = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ , $A(-2)$ este inversabilă $\Leftrightarrow \det(A(-2)) \neq 0$ $\det(A(-2)) = 3 \neq 0$ , concluzia	3p 2p
c)	$a = 2$ , sistemul devine $\begin{cases} x + y = -2 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$ , $\det(A(2)) = -5 \neq 0 \Rightarrow$ sistem compatibil unic determinat $x = -3/5, y = -7/5$	2p 3p
2. a)	$1 * (-5) = 1 \cdot (-5) + 5 \cdot 1 + 5 \cdot (-5) + 20 =$ $= -5 + 5 - 25 + 20 = -5$	2p 3p
b)	$x * (-4) = (x + 5)(-4 + 5) - 5 = x$ $(-4) * x = (-4 + 5)(x + 5) - 5 = x, e = -4$ element neutru	2p 3p
c)	$x * (-5) = -5, (-5) * y = -5$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ $(-2023) * (-2022) * (-2021) * \dots * (-1) = [(-2023) * \dots * (-6)] * (-5) * [(-4) * \dots * (-1)] =$ $(-5) * [(-4) * \dots * (-1)] = -5$	2p 3p

**SUBIECTUL III (30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f$ derivabilă pe $\mathbb{R}$ , $f'(x) = ((x^2 - 3)e^x)' = (x^2 - 3)' \cdot e^x + (x^2 - 3) \cdot (e^x)' =$ $= (2x + 2x - 3)e^x, (\forall)x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b>	cu $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} f(-x)$ avem $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} (x^2 - 3)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 3}{e^x} \stackrel{IH}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x^2 - 3)'}{(e^x)'}$ $= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{e^x} \stackrel{IH}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(2x)'}{(e^x)'}$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>c)</b>	Ecuația $f'(x) = 0$ are soluțiile $x_1 = -3, x_2 = 1$ , $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ , $f(-3) = 6e^{-3}$ , $f(1) = -2e$ , $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ Funcția $f$ este strict crescătoare pe intervalele $(-\infty, -3)$ și $(1, +\infty)$ , strict descrescătoare pe $(-3, 1)$ , realizând un minim global în $x_2$ , $f(x) \geq -2e \Leftrightarrow (x^2 - 3)e^x \geq -2e / : e^x \neq 0 \Leftrightarrow x^2 - 3 \geq -2e^{1-x} \Leftrightarrow x^2 + 2e^{1-x} \geq 3, (\forall)x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$F$ derivabilă pe $[1, +\infty)$ și $F'(x) = [(x-1)\ln x - x + 2023]' = (x-1)' \ln x + (x-1)(\ln x)' - 1 =$ $= \ln x + \frac{x-1}{x} - 1 = f(x)$ pentru orice $x \in [1, +\infty)$ deci, $F$ este o primitivă a funcției $f$	<b>3p</b>  <b>2p</b>
<b>b)</b>	$\int \left( f(x) + \frac{1}{x} \right) dx = \int \left( \ln x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x} \right) dx = \int \ln x dx =$ $= \int x' \ln x dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + \zeta$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>c)</b>	$\int f(x) F^2(x) dx = \int F'(x) F^2(x) dx =$ $= \frac{F^3(x)}{3} = \frac{[(x-1)\ln x - x + 2023]^3}{3} + \zeta$	<b>2p</b>  <b>3p</b>