

**Simulare județeană a Examenului național de bacalaureat 2023**  
**Ianuarie 2023**  
**Proba E.c) - Matematică M\_mate-info**  
**Varianta 1**

- Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică  
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică
- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
  - Timpul de lucru efectiv este de trei ore

**SUBIECTUL I****(30 de puncte)**

- 5p 1. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $[2x + 3] = 5$ , unde  $[x]$  reprezintă partea întreagă a lui  $x$ .
- 5p 2. Determinați numărul complex  $z$  cu proprietatea  $3z + 2\bar{z} + 15 - i = 0$ .
- 5p 3. Să se găsească termenul independent de  $a$  din dezvoltarea  $(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{a}})^{12}$ , unde  $a > 0$ .
- 5p 4. Să se determine  $m \in \mathbb{R}$  pentru care modulul vectorului  $\vec{v} = (m - 1)\vec{i} + (2m - 3)\vec{j}$  are valoarea minimă.
- 5p 5. Calculați  $tg \frac{x}{2}$  știind că  $x \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$  și  $\sin x = \frac{1}{2}$ .
- 5p 6. Să se calculeze măsura unghiului ascuțit dintre dreptele  $d_1 : 4x + 3y - 2 = 0$  și  $d_2 : x + 7y - 4 = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea****(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(x) = \begin{pmatrix} 4-x & 1 & 4 \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{pmatrix}, x \in \mathbb{R}$
- 5p a) Arătați că  $\det(A(0)) = -21$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $x$  pentru care  $\text{rang}(A(x)) = 3$ .
- 5p c) Rezolvați ecuația  $\det(A(\lg x)) = 0, x > 0$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă  $x * y = xy - 3x - 3y + 12$ .
- 5p a) Arătați că  $x * y = (x - 3)(y - 3) + 3$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p b) Determinați numerele reale  $a$ , pentru care  $\underbrace{a * a * \dots * a}_{\text{de } 2023 \text{ ori } a} = 4$ .
- 5p c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $3^x * 9^y * 27^z = 3$ .

**SUBIECTUL al III-lea****(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: [1, \infty) \rightarrow [1, \infty), f(x) = x \cdot (1 + \ln x)$
- 5p a) Arătați că  $f'(x) = 2 + \ln x, x \in [1, \infty)$ .
- 5p b) Demonstrați că funcția  $f$  este bijectivă.
- 5p c) Calculați următoarea limită  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x) \cdot \ln x}{x}$
2. Se consideră  $f_n: [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, f_n(x) = \sin x \cdot \cos x \cdot \cos 2x \cdot \dots \cdot \cos 2^{n-1}x$  și  $I_n = \int f_n(x) dx, n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p a) Calculați  $I_1$ .
- 5p b) Arătați că orice primitivă a funcției  $f_2$  este convexă pe  $[0, \frac{\pi}{8}]$ .
- 5p c) Să se determine primitiva funcției  $f_{2023}$  care trece prin punctul  $A(0,0)$ .

**Simularea examenului național de bacalaureat 2023**
**Barem de evaluare și notare**

 Matematică  $M\_mate-info$ 

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

( 30 de puncte )

1.	$5 \leq 2x + 3 < 6$ $2 \leq 2x < 3 \Rightarrow 1 \leq x < \frac{3}{2} \Rightarrow x \in [1; \frac{3}{2})$	2p 3p
2.	$z = a + ib, \text{ cu } a, b \in \mathbb{R} \quad 3(a + ib) + 2(a - ib) + 15 - i = 0$ $(5a + 15) + i(b - 1) = 0 \Rightarrow a = -3, b = 1 \Rightarrow z = -3 + i$	2p 3p
3.	$T_{k+1} = C_{12}^k \cdot (\sqrt{a})^{12-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k = C_{12}^k \cdot a^{6-k}$ $6 - k = 0 \Rightarrow k = 6 \Rightarrow T_7 = C_{12}^6$	3p 2p
4.	$ \vec{v}  = \sqrt{(m-1)^2 + (2m-3)^2} = \sqrt{5m^2 - 14m + 10}$ $5m^2 - 14m + 10$ minim pentru $m = \frac{14}{10} = \frac{7}{5}$	3p 2p
5.	$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \Rightarrow  \cos x  = \frac{\sqrt{3}}{2}$ . Cum $x \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \Rightarrow \cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = 2 + \sqrt{3}$	2p 3p
6.	$m_1 = -\frac{4}{3}, m_2 = -\frac{1}{7}$ $\operatorname{tg} \alpha = \left  \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right  = 1, \alpha$ unghi ascuțit $\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$	2p 3p

**SUBIECTUL al II - lea**

( 30 de puncte )

1a)	$\det(A(0)) = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 8 + 16 + 4 - 16 - 32 - 1 = -21$	2p 3p
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 7-x & 7-x & 7-x \\ 1 & 2-x & 2 \\ 2 & 4 & 1-x \end{vmatrix} = (7-x)(x^2 - 3)$ $\operatorname{rang}(A(x)) = 3 \Rightarrow \det(A(x)) \neq 0 \Rightarrow x \in \mathbb{R} \setminus \{7, \sqrt{3}, -\sqrt{3}\}$	3p 2p
c)	$\det(A(\lg x)) = 0 \Rightarrow (7 - \lg x)(\lg^2 x - 3) = 0 \Rightarrow \lg x = 7, \lg^2 x = 3$ $x = 10^7, \quad x = 10^{\sqrt{3}}, \quad x = 10^{-\sqrt{3}}$	2p 3p
2a)	$x * y = x(y - 3) - 3(y - 3) + 3 =$ $= (x - 3)(y - 3) + 3$	3p 2p
b)	Se demonstrează prin inducție $P(n): \underbrace{a * a * \dots * a}_{\text{de } n \text{ ori } a} = (a - 3)^n + 3, n \in \mathbb{N}^*$ $(a - 3)^{2023} + 3 = 4 \Rightarrow (a - 3)^{2023} = 1 \Rightarrow a = 4$	3p 2p
c)	$3^x * 9^y * 27^z = 3 \Rightarrow (3^x - 3)(9^y - 3)(27^z - 3) = 0$	2p 3p

	$x = 1, y = \frac{1}{2}, z = \frac{1}{3}$	
--	---	--

**SUBIECTUL al III – lea ( 30 de puncte )**

<b>1a)</b>	$f'(x) = 1 + \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$ $f'(x) = 2 + \ln x, x \geq 1$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>b)</b>	$f'(x) > 0, (\forall)x \geq 1 \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $[1, \infty) \Rightarrow f$ injectivă . $f(1) = 1, \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ $f$ continuă și strict crescătoare pe $[1, \infty) \Rightarrow Im f = [1, \infty) \Rightarrow f$ surjectivă . Cum $f$ este injectivă și surjectivă $\Rightarrow f$ este bijectivă.	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>c)</b>	$f^{-1}(x) = y, y \rightarrow \infty, x = y(1 + \ln y) .$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f^{-1}(x) \cdot \ln x}{x} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{y \cdot \ln[y(1 + \ln y)]}{y(1 + \ln y)} = \lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\ln y + \ln(1 + \ln y)}{1 + \ln y} = 1$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>2a)</b>	$I_1 = \int f_1(x) dx = \int \sin x \cos x dx =$ $= \int \sin x \cdot (\sin x)' dx = \frac{\sin^2 x}{2} + C$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>b)</b>	$f_2(x) = \sin x \cos x \cos 2x = \frac{1}{4} \sin 4x, x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ $F_2$ primitiva funcției $f_2 \Rightarrow F_2''(x) = f_2'(x) = \cos 4x, x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right]$ $F_2''(x) \geq 0, (\forall) x \in \left[0, \frac{\pi}{8}\right] \Rightarrow F_2$ convexă pe $\left[0, \frac{\pi}{8}\right]$	<b>2p</b>  <b>3p</b>
<b>c)</b>	$I_{2023} = \int f_{2023}(x) dx = \frac{1}{2^{2023}} \int \sin(2^{2023}x) dx = -\frac{1}{2^{4046}} \cdot \cos(2^{2023}x) + C$ $F_{2023}(x) = -\frac{1}{2^{4046}} \cos(2^{2023}x) + c, F_{2023}(0) = 0 \Rightarrow c = \frac{1}{2^{4046}} \Rightarrow$ $\Rightarrow F_{2023}(x) = -\frac{1}{2^{4046}} \cos(2^{2023}x) + \frac{1}{2^{4046}}$	<b>3p</b>  <b>2p</b>