Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$, știind că $a_3=6$ și $a_4=9$.

5p **2.** Se consideră funcțiile $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+2x-3$ și $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=x-3$. Determinați numerele reale a pentru care $f(a)=g(a)$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_3(x+3)=2$.

5p **4.** În urma unei scumpiri cu 30%, prețul unui produs a crescut cu 60 de lei. Determinați prețul produsului după scumpire.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-4,1)$, $B(2,3)$ și dreapta d de ecuație $y=2x+a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că mijlocul segmentului AB aparține dreptei d.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, cu $AB=AC$, $BC=12$ și măsura unghiului B egală cu $45°$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 36.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix} x & x \\ 1 & 2x+1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(0))=0$.

5p **b)** Determinați numărul real a pentru care $2A(4)+A(-2)=aA(2)$.

5p **c)** Arătați că, dacă $X\in\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ astfel încât $X\cdot A(1)=A(m)$, unde m este număr întreg, atunci matricea X are toate elementele numere întregi.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=(x+y)(x-1)(y-1)+1$.

5p **a)** Arătați că $2*1=1$.

5p **b)** Arătați că legea de compoziție „$*$” este comutativă.

5p **c)** Determinați numerele naturale n pentru care $n*(1-n)\geq n^2$.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+3}{x^2}+\ln x$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x^2-x-6}{x^3}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Demonstrați că $\ln\frac{x}{3}\geq\frac{2}{3}-\frac{1}{x}-\frac{3}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{e^x}{2}+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2\left(f(x)-\frac{e^x}{2}\right)dx=4$.

5p **b)** Arătați că $\int_{0}^{1} 2x\left(f\left(x\right)-1\right)dx=\frac{5}{3}$.

5p **c)** Determinați numărul real a pentru care $\int_{-1}^{0}\left(f\left(x\right)-x\right)\cdot f\left(x\right)dx=\frac{\left(3e+1\right)\left(3e+a\right)}{8e^2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$r = a_4 - a_3 = 3$, unde r este rația progresiei aritmetice $(a_n)_{n\geq 1}$	**2p**
	$a_3 = a_1 + 2r \Rightarrow a_1 = 6 - 2\cdot 3 = 0$	**3p**
2.	$f(a) = g(a) \Leftrightarrow a^2 + 2a - 3 = a - 3 \Leftrightarrow a^2 + a = 0$	**3p**
	$a = -1$ sau $a = 0$	**2p**
3.	$x + 3 = 3^2 \Leftrightarrow x + 3 = 9$	**3p**
	$x = 6$, care convine	**2p**
4.	$\frac{30}{100}\cdot x = 60$, unde x este prețul înainte de scumpire, deci $x = 200$ de lei	**3p**
	După scumpire, prețul produsului este $200 + 60 = 260$ de lei	**2p**
5.	$M(-1,2)$, unde M este mijlocul segmentului AB	**2p**
	$2 = 2\cdot(-1) + a$, de unde obținem $a = 4$	**3p**
6.	Triunghiul ABC este dreptunghic isoscel, de unde obținem $AB = AC = 6\sqrt{2}$	**3p**
	$\mathcal{A}_{\Delta ABC} = \frac{AB\cdot AC}{2} = \frac{6\sqrt{2}\cdot 6\sqrt{2}}{2} = 36$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$	**3p**
	$= 0\cdot 1 - 0\cdot 1 = 0$	**2p**
b)	$2A(4) + A(-2) = 2\begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 1 & 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 6 \\ 3 & 15 \end{pmatrix} =$	**3p**
	$= 3\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = 3A(2)$, de unde obținem $a = 3$	**2p**
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = 2$ și $(A(1))^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$	**2p**
	$A(m) = \begin{pmatrix} m & m \\ 1 & 2m+1 \end{pmatrix}$ și, cum $X = A(m)\cdot(A(1))^{-1}$, obținem $X = \begin{pmatrix} m & 0 \\ -m+1 & m \end{pmatrix}$, unde m este număr întreg, deci matricea X are toate elementele numere întregi	**3p**
2.a)	$2 * 1 = (2+1)(2-1)(1-1) + 1 =$	**3p**
	$= 3\cdot 1\cdot 0 + 1 = 1$	**2p**

b)	$x * y = (x+y)(x-1)(y-1)+1 =$	**2p**
	$= (y+x)(y-1)(x-1)+1 = y * x$, pentru orice numere reale x și y, deci legea de compoziție „$*$” este comutativă	**3p**
c)	$n*(1-n) = -n^2+n+1$, pentru orice număr natural n	**2p**
	$-n^2+n+1 \geq n^2 \Leftrightarrow 2n^2-n-1 \leq 0$ și, cum n este număr natural, obținem $n=0$ sau $n=1$	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x) = \dfrac{x^2-(x+3)\cdot 2x}{x^4} + \dfrac{1}{x} =$	**3p**
	$= \dfrac{-x-6}{x^3} + \dfrac{1}{x} = \dfrac{x^2-x-6}{x^3}$, $x \in (0,+\infty)$	**2p**
b)	$f(1)=4$, $f'(1)=-6$	**2p**
	Ecuația tangentei este $y - f(1) = f'(1)(x-1)$, adică $y=-6x+10$	**3p**
c)	$f'(x)=0 \Rightarrow x=3$; $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (0,3] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(0,3]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [3,+\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[3,+\infty)$, deci $f(x) \geq f(3)$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$	**3p**
	$\dfrac{x+3}{x^2} + \ln x \geq \dfrac{2}{3} + \ln 3 \Rightarrow \ln\dfrac{x}{3} \geq \dfrac{2}{3} - \dfrac{x+3}{x^2} \Rightarrow \ln\dfrac{x}{3} \geq \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{x} - \dfrac{3}{x^2}$, pentru orice $x \in (0,+\infty)$	**2p**
2.a)	$\displaystyle\int_0^2 \left(f(x) - \frac{e^x}{2}\right)dx = \int_0^2 (x+1)\,dx = \left(\frac{x^2}{2}+x\right)\Bigg\vert_0^2 =$	**3p**
	$= \dfrac{2^2}{2} + 2 = 4$	**2p**
b)	$\displaystyle\int_0^1 2x\big(f(x)-1\big)dx = \int_0^1 \left(2x^2+xe^x\right)dx = \frac{2x^3}{3}\Bigg\vert_0^1 + (x-1)e^x\Big\vert_0^1 =$	**3p**
	$= \dfrac{2}{3} + 1 = \dfrac{5}{3}$	**2p**
c)	Cum $f'(x) = 1 + \dfrac{e^x}{2} = f(x) - x$, $x \in \mathbb{R}$, obținem $\displaystyle\int_{-1}^0 \big(f(x)-x\big)\cdot f(x)\,dx = \int_{-1}^0 f'(x)\cdot f(x)\,dx =$ $= \dfrac{f^2(x)}{2}\Bigg\vert_{-1}^0 = \dfrac{9e^2-1}{8e^2}$	**3p**
	$\dfrac{9e^2-1}{8e^2} = \dfrac{(3e+1)(3e+a)}{8e^2}$, de unde obținem $a=-1$	**2p**