

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Calculați termenul b_4 al progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$, știind că $b_1 = \sqrt{2}$ și $b_2 = 4$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = mx^2 - 2x + 1$, unde m este număr real nenul. Determinați numărul real nenul m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} - 3^x - 6 \cdot 3^{x-1} = 6$.
- 5p 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea A , numărul $2n - 60$ să aparțină mulțimii A .
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,4)$, $B(5,2)$ și C , mijlocul segmentului AB . Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul C și este perpendiculară pe dreapta AB .
- 5p 6. Se consideră triunghiul isoscel ABC , cu măsura unghiului A egală cu 120° și $AB = 6$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu $9\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = xI_2 + iA$, unde x este număr real și $i^2 = -1$.
- 5p a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p b) Determinați numărul real x pentru care $B(3) \cdot B(5) = 8B(x)$.
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi pentru care matricea $B(m) + iB(n)$ nu este inversabilă.
2. Pe mulțimea $M = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție $x * y = xy - \sqrt{(x-1)(y-1)}$.
- 5p a) Arătați că $2 * 5 = 8$.
- 5p b) Arătați că $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Demonstrați că $(nx) * y \geq x(n * y)$, pentru orice $x, y \in M$ și orice număr natural n , $n \geq 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4\sqrt{x}}{x^2 + 3}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{6(1-x^2)}{\sqrt{x}(x^2+3)^2}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați $a \in (0, +\infty)$, știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa Ox .
- 5p c) Demonstrați că $\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} > \frac{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 5}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{e^{-x} + 2x}{e^x}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 e^x f(x) dx = e$.

5p b) Arătați că $\int_{-1}^0 f(x) dx = -1$.

5p c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 F(x) f''(x) dx = \frac{a(e+1)}{e^2}$, unde $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este primitiva funcției f cu proprietatea $F(0) = 0$.

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|----|---|----------|
| 1. | $q = \frac{b_2}{b_1} = 2\sqrt{2}$, unde q este rația progresiei geometrice $(b_n)_{n \geq 1}$ | 2p |
| | $b_4 = b_1 q^3 = \sqrt{2} \cdot (2\sqrt{2})^3 = 32$ | 3p |
| 2. | Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow 4 - 4m = 0$ $m = 1$ | 3p 2p |
| 3. | $3^{x-1}(3^3 - 3 - 6) = 6 \Leftrightarrow 3^{x-1} \cdot 18 = 6 \Leftrightarrow 3^{x-1} = \frac{1}{3}$ $x - 1 = -1$, deci $x = 0$ | 3p 2p |
| 4. | Mulțimea A are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numărul $2n - 60$ aparține mulțimii A dacă $10 \leq 2n - 60 \leq 99$, deci sunt 45 de cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{45}{90} = \frac{1}{2}$ | 2p 3p |
| 5. | $m_{AB} = -\frac{1}{3}$ și, cum $d \perp AB$, obținem $m_d = 3$ $C(2, 3)$ și, cum $C \in d$, obținem că ecuația dreptei d este $y - 3 = 3(x - 2)$, adică $y = 3x - 3$ | 2p 3p |
| 6. | $AC = AB = 6$ $A_{\Delta ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin 120^\circ}{2} = \frac{6 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = 9\sqrt{3}$ | 2p 3p |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

| | | |
|------|--|----------|
| 1.a) | $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-1) =$ $= 0 + 1 = 1$ | 3p 2p |
| b) | $B(3) \cdot B(5) = (3I_2 + iA)(5I_2 + iA) = 15I_2 + 8iA + i^2 A \cdot A = 16I_2 + 8iA =$ $= 8(2I_2 + iA) = 8B(2)$, deci $x = 2$ | 3p 2p |
| c) | $B(m) + iB(n) = \begin{pmatrix} m + in & i - 1 \\ -i + 1 & m + in \end{pmatrix} \Rightarrow \det(B(m) + iB(n)) = (m + in)^2 - 2i$, unde $m, n \in \mathbb{Z}$ $B(m) + iB(n)$ nu este inversabilă, deci $\det(B(m) + iB(n)) = 0 \Rightarrow m^2 - n^2 + 2(mn - 1)i = 0$ și, cum m și n sunt numere întregi, obținem perechile $(-1, -1)$ și $(1, 1)$ | 2p 3p |
| 2.a) | $2 * 5 = 2 \cdot 5 - \sqrt{(2-1)(5-1)} =$ $= 10 - \sqrt{4} = 8$ | 3p 2p |

| | | |
|-----------|--|-----------|
| b) | $x * 1 = x \cdot 1 - \sqrt{(x-1)(1-1)} = x$, pentru orice $x \in M$ | 2p |
| | $1 * x = 1 \cdot x - \sqrt{(1-1)(x-1)} = x$, pentru orice $x \in M$, deci $e = 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „*” | 3p |
| c) | $((nx) * y) - x(n * y) = x\sqrt{(n-1)(y-1)} - \sqrt{(nx-1)(y-1)} = \sqrt{y-1} \cdot \frac{(x-1)(nx-x-1)}{x\sqrt{n-1} + \sqrt{nx-1}}$, pentru $x, y \in M$ și $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ | 2p |
| | Cum $nx - x - 1 = x(n-1) - 1$ și $x \geq 1$, n este număr natural, $n \geq 2$, obținem $nx - x - 1 \geq 0$, deci $(nx) * y \geq x(n * y)$, pentru orice $x, y \in M$ și orice număr natural n , $n \geq 2$ | 3p |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

| | | |
|-------------|---|------------------------|
| 1.a) | $f'(x) = \frac{\frac{2}{\sqrt{x}} \cdot (x^2 + 3) - 4\sqrt{x} \cdot 2x}{(x^2 + 3)^2} =$ | 3p |
| | $= \frac{2x^2 + 6 - 8x^2}{\sqrt{x}(x^2 + 3)^2} = \frac{6(1 - x^2)}{\sqrt{x}(x^2 + 3)^2}$, $x \in (0, +\infty)$ | 2p |
| b) | Tangenta la graficul funcției f în punctul $A(a, f(a))$ este paralelă cu axa $Ox \Leftrightarrow f'(a) = 0$, deci $1 - a^2 = 0$ Cum $a \in (0, +\infty)$, obținem $a = 1$ | 3p 2p |
| c) | $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(1, +\infty)$ | 2p |
| | $1 < x < x + \frac{1}{x} \Rightarrow f(x) > f\left(x + \frac{1}{x}\right)$, deci $\frac{\sqrt{x}}{x^2 + 3} > \frac{\sqrt{x + \frac{1}{x}}}{x^2 + \frac{1}{x^2} + 5}$, pentru orice $x \in (1, +\infty)$ | 3p |
| 2.a) | $\int_0^1 e^x f(x) dx = \int_0^1 (e^x + 2x) dx = (e^x + x^2) \Big _0^1 =$ | 3p |
| | $= e + 1 - 1 = e$ | 2p |
| b) | $\int_{-1}^0 f(x) dx = \int_{-1}^0 (1 + 2xe^{-x}) dx = (x - 2(x+1)e^{-x}) \Big _{-1}^0 =$ | 3p |
| | $= -2 - (-1) = -1$ | 2p |
| c) | $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci $\int_0^1 F(x) f''(x) dx = F(x) f'(x) \Big _0^1 - \frac{f^2(x)}{2} \Big _0^1 =$ | 3p |
| | $= F(1) f'(1) - F(0) f'(0) - \frac{f^2(1) - f^2(0)}{2}$ $f'(x) = 2(1-x)e^{-x}$, deci $f'(1) = 0$ și, cum $F(0) = 0$, obținem $\int_0^1 F(x) f''(x) dx = \frac{-2(e+1)}{e^2}$, deci $a = -2$ | 2p |