

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- | | |
|----|--|
| 5p | 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 1 - 2i$ și $z_2 = 2 + i$. Arătați că $(z_1 + i)(z_2 - 1) = 2$. |
| 5p | 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4x + m$, unde m este număr real. Determinați valorile reale ale lui m pentru care $f(x) > 0$, pentru orice număr real x . |
| 5p | 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $1 + 2 \log_2 \sqrt{x-2} = \log_2 x$. |
| 5p | 4. Se consideră mulțimea A , a numerelor naturale de două cifre. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea A , acesta să aibă exact doi multipli în mulțimea A . |
| 5p | 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-2, -2)$, $B(3, 1)$ și $M(2, 4)$. Determinați coordonatele punctului N , știind că patrulaterul $ABMN$ este paralelogram. |
| 5p | 6. Se consideră triunghiul ABC , în care $\sin(A+B) + \cos C = 1$. Arătați că triunghiul ABC este dreptunghic. |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră matricea $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 3 & a \\ 2 & 1 & -1 \\ a & 3 & 1 \end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} x + 3y + az = 2 \\ 2x + y - z = -1 \\ ax + 3y + z = 1 \end{cases}$, unde a este număr real. |
| 5p | a) Arătați că $\det(A(1)) = 0$. |
| 5p | b) Arătați că $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a , unde $B(a) = A(a) - A(0)$. |
| 5p | c) Demonstrați că, dacă sistemul de ecuații are o infinitate de soluții, atunci $x_0 y_0 + y_0 z_0 + z_0 x_0 \leq 0$, pentru orice soluție (x_0, y_0, z_0) a sistemului de ecuații, cu x_0, y_0 și z_0 numere reale. |
| | 2. Pe mulțimea numerelor complexe se definește legea de compoziție $z_1 * z_2 = \frac{z_1 + z_2}{4 \cdot z_1 z_2 + 1}$. |
| 5p | a) Arătați că $(-1) * 2 = \frac{1}{9}$. |
| 5p | b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”. |
| 5p | c) Demonstrați că există cel puțin trei numere complexe distincte și nenule care verifică egalitatea $ z * z = z $. |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

- | | |
|----|---|
| | 1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x^4 + 16}}{x}$. |
| 5p | a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x^2 - 4)(x^2 + 4)}{x^2 \sqrt{x^4 + 16}}$, $x \in (0, +\infty)$. |
| 5p | b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f . |

- 5p** c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care ecuația $f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = m$ are exact două soluții.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 1}{e^x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^3 e^x f(x) dx = 12$.
- 5p** b) Arătați că orice primitivă G a funcției $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \frac{1}{f(x)}$ este convexă.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{e^x f(x)}} dx = \frac{a - \sqrt{2}}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(z_1 + i)(z_2 - 1) = (1 - 2i + i)(2 + i - 1) = (1 - i)(1 + i) =$ $= 1 - i^2 = 2$	2p 3p
2.	$\Delta < 0$ și, cum $\Delta = 16 - 4m$, obținem $16 - 4m < 0$ $m \in (4, +\infty)$	3p 2p
3.	$1 + \log_2(x - 2) = \log_2 x$, deci $\log_2 \frac{x}{x-2} = 1$, de unde obținem $\frac{x}{x-2} = 2$ $x = 4$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile Numărul n din mulțimea A are exact doi multipli în mulțimea A dacă $2n \leq 99 < 3n$, de unde obținem că numerele din mulțimea A care au exact doi multipli în mulțimea A sunt 34, 35, 36, ..., 49, deci sunt 16 cazuri favorabile și $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{16}{90} = \frac{8}{45}$	2p 3p
5.	$P(0,1)$, unde P este mijlocul segmentului AM Segmentele AM și BN au același mijloc, de unde obținem $N(-3,1)$	2p 3p
6.	$A + B = \pi - C$, deci $\sin C + \cos C = 1$ $\sin^2 C + 2\sin C \cos C + \cos^2 C = 1 \Rightarrow \sin 2C = 0$ și, cum $C \in (0, \pi)$, obținem $C = \frac{\pi}{2}$, deci triunghiul ABC este dreptunghic	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(1)) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 1 + 3 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 3 \cdot 1 =$ $= 1 + 6 - 3 - 1 + 3 - 6 = 0$	3p 2p
b)	$B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a^2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $B(a) \cdot B(a) \cdot B(a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^3 \\ 0 & 0 & 0 \\ a^3 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^3 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = a^3 B(1)$, pentru orice număr real a	2p 3p

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{\frac{4x^3}{2\sqrt{x^4+16}} \cdot x - \sqrt{x^4+16}}{x^2} = \frac{2x^4 - x^4 - 16}{x^2\sqrt{x^4+16}} =$ $= \frac{x^4 - 16}{x^2\sqrt{x^4+16}} = \frac{(x^2-4)(x^2+4)}{x^2\sqrt{x^4+16}}, \quad x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+16}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 + \frac{16}{x^4}} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^4+16} - x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{16}{x(\sqrt{x^4+16} + x^2)} = 0, \text{ deci dreapta de ecuație } y = x \text{ este asimptotă oblică spre } +\infty \text{ la graficul funcției } f$	2p 3p
c)	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$; $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (0, 2)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$ $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x) + f\left(\frac{4}{x}\right) = 2f(x)$, deci g este strict descrescătoare pe $(0, 2)$ și g este strict crescătoare pe $(2, +\infty)$ și, cum g este continuă, $g(2) = 4\sqrt{2}$, $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = +\infty$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, obținem că ecuația $g(x) = m$ are exact două soluții pentru $m \in (4\sqrt{2}, +\infty)$	2p 3p

2.a)	$\int_0^3 e^x f(x) dx = \int_0^3 (x^2 + 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} + x \right) \Big _0^3 =$ $= \frac{27}{3} + 3 = 12$	3p
b)	G este primitivă a funcției $g \Rightarrow G'(x) = g(x)$, deci $G''(x) = g'(x) =$ $= \frac{e^x (x-1)^2}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția G este convexă	2p 3p
c)	$\int_0^1 \frac{x^3}{e^x f(x)} dx = \int_0^1 \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + x - x}{\sqrt{x^2 + 1}} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 (x^2 + 1)' \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} \right) dx =$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{2(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}{3} - 2\sqrt{x^2 + 1} \right) \Big _0^1 = \frac{2 - \sqrt{2}}{3}$ $\frac{2 - \sqrt{2}}{3} = \frac{a - \sqrt{2}}{3}, \text{ de unde obținem } a = 2$	3p 2p