Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2022

Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**
- **La toate subiectele se cer rezolvări complete.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Calculați modulul numărului complex $z=\frac{7-8i}{8+7i}$.

5p **2.** Determinați numărul real m, știind că dreapta de ecuație $x=2$ este axă de simetrie pentru graficul funcției $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=x^2-mx+4$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $4^x+2^{x+1}=24$.

5p **4.** Alegem, la întâmplare, un număr natural de două cifre. Determinați probabilitatea ca produsul cifrelor acestuia să fie un număr divizibil cu 10.

5p **5.** Triunghiul ABC este dreptunghic în A și are cateta AB de lungime 5. Calculați produsul scalar $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Determinați numerele reale $x\in\left(\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right)$ pentru care $\sin 2x+\sin x=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $A(x)=\begin{pmatrix}1+x & 0 & -x\\ 0 & 1 & 0\\ 2x & 0 & 1-2x\end{pmatrix}$.

5p **a)** Arătați că determinantul matricei $A(x)$ este egal cu $1-x$, oricare ar fi numărul real x.

5p **b)** Demonstrați că $A(x)\cdot A(y)=A(x+y-xy)$, oricare ar fi numerele reale x și y.

5p **c)** Determinați numerele reale $x\neq 1$ pentru care matricea $A(x)$ coincide cu inversa sa.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x\circ y=xy+8x+8y+56$.

5p **a)** Calculați $(-6)\circ(-5)\circ(-4)$.

5p **b)** Demonstrați că $x\circ x=-8$ dacă și numai dacă $x=-8$.

5p **c)** Determinați numerele întregi n cu proprietatea că $n\circ n$ este pătratul unui număr natural.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=1-\frac{\ln x}{x}-\frac{1}{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

5p **b)** Arătați că există un singur punct *A* situat pe graficul funcției *f* cu proprietatea că tangenta în *A* la graficul funcției *f* este o dreaptă orizontală și determinați coordonatele acestui punct.

5p **c)** Demonstrați că $\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}\le 1-\frac{1}{\sqrt{x}}$, oricare ar fi $x\in(0,\infty)$.

2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=\sqrt{3x^2+1}$.

5p **a)** Arătați că $\int_{-1}^{1} f^2(x)\,dx=4$.

5p **b)** Determinați primitiva *F* a funcției *f* cu proprietatea că $F(0)=0$, ținând cont eventual de faptul că funcția *F* este de forma $F(x)=ax\sqrt{3x^2+1}+b\ln\left(x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2+1}\right)+c, x\in\mathbb{R}$, unde *a*, *b* și *c* sunt numere reale.

5p **c)** Demonstrați că $2\le\int_{-1}^{1} f(x)\,dx\le 3$.

Simulare pentru EXAMENUL DE BACALAUREAT – 2022
Probă scrisă la matematică **Varianta 1**

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea punctajului obţinut la 10.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\lvert 7-8i\rvert=\sqrt{7^2+(-8)^2}=\sqrt{8^2+7^2}=\lvert 8+7i\rvert$	**3p**
	$\left\lvert\frac{7-8i}{8+7i}\right\rvert=\frac{\lvert 7-8i\rvert}{\lvert 8+7i\rvert}=1$	**2p**
2.	$-\frac{b}{2a}=2$	**3p**
	$m=4$	**2p**
3.	Cu notația $2^x=t$, $t>0$, ecuația devine $t^2+2t-24=0$.	**2p**
	Obținem $t_1=4$, care convine, și $t_2=-6$, care nu convine.	**2p**
	Singura soluție a ecuației inițiale este $x=2$.	**1p**
4.	Există 90 de numere naturale de două cifre.	**1p**
	Dintre acestea, nouă au produsul cifrelor 0 și câte două au produsul cifrelor 10, 20, 30, 40.	**2p**
	Evenimentul are probabilitatea $\frac{17}{90}$.	**2p**
5.	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}\cdot\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}\right)=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=-25$, deoarece	**2p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BA}=AB\cdot AB\cdot\cos 180^\circ=-25$, iar	**2p**
	$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=AB\cdot AC\cdot\cos 90^\circ=0$.	**1p**
6.	Obținem că $\sin x=0$ sau $\cos x=-\frac{1}{2}$, deci	**2p**
	$x\in\left\{\frac{2\pi}{3},\pi,\frac{4\pi}{3}\right\}$.	**3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A(x)=(1+x)\cdot 1\cdot(1-2x)+0+0-(-x)\cdot 1\cdot 2x-0-0=$	**3p**
	$=1-x-2x^2+2x^2=1-x$	**2p**

b)	$A(x)\cdot A(y)=\begin{pmatrix}(1+x)(1+y)-2xy & 0 & -y(1+x)-x(1-2y)\\ 0 & 1 & 0\\ 2x(1+y)+2y(1-2x) & 0 & -2xy+(1-2x)(1-2y)\end{pmatrix}=$	**3p**
	$=\begin{pmatrix}1+x+y-xy & 0 & -x-y+xy\\ 0 & 1 & 0\\ 2x+2y-2xy & 0 & 1-2x-2y+2xy\end{pmatrix}=A(x+y-xy)$	**2p**
c)	$A(x)$ coincide cu inversa sa dacă și numai dacă $A(x)\cdot A(x)=I_3=A(0)$.	**2p**
	Folosind b) obținem că $2x-x^2=0$,	**2p**
	așadar $x\in\{0,2\}$.	**1p**
2.a)	$(-6)\circ(-5)=-2$	**3p**
	$(-2)\circ(-4)=16$	**2p**
b)	$x\circ x=(x+8)^2-8$	**2p**
	$x\circ x=-8\Leftrightarrow(x+8)^2=0\Leftrightarrow x=-8$	**3p**
	Notă. Pentru demonstrarea implicației $x=-8\Rightarrow x\circ x=-8$ se acordă **2p**, iar pentru demonstrarea implicației $x\circ x=-8\Rightarrow x=-8$ se acordă **3p**.	
c)	Fie $n\circ n=k^2$, $n\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}$; atunci $(n+8)^2-8=k^2$, prin urmare $(n+8+k)(n+8-k)=8$.	**2p**
	Cele două paranteze sunt numere întregi cu aceeași paritate, primul fiind mai mare. Atunci $(n+8+k,n+8-k)\in\{(4,2),(-2,-4)\}$, deci $n\in\{-5,-11\}$ (în ambele situații, $k=1$).	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=0-\dfrac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln x}{x^2}-\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=$	**3p**
	$=-\dfrac{1-\ln x-1}{x^2}=\dfrac{\ln x}{x^2},x\in(0,\infty)$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției *f* în punctul de abscisă x_0, situat pe grafic, este o dreaptă orizontală atunci când $f'(x_0)=0$.	**2p**
	Obținem că $x_0=1$, deci $A(1,0)$ este unicul punct cu proprietatea dorită.	**3p**
c)	Folosind semnul derivatei, funcția *f* este descrescătoare pe $(0,1]$ și crescătoare pe $[1,\infty)$.	**2p**
	Atunci $f(x)\geq f(1)=0,\forall x\in(0,\infty)$.	**1p**
	Rezultă că $f\left(\sqrt{x}\right)\geq 0$, adică $1-\dfrac{\ln\sqrt{x}}{\sqrt{x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}\geq 0$, de unde $\dfrac{\ln x}{2\sqrt{x}}\leq 1-\dfrac{1}{\sqrt{x}},\forall x\in(0,\infty)$.	**2p**
2.a)	$\int_{-1}^{1}f^2(x)dx=\int_{-1}^{1}\left(3x^2+1\right)dx=\left(x^3+x\right)\Big\|_{-1}^{1}=$	**3p**
	$=(1-(-1))+(1-(-1))=4$	**2p**

b)	$F'(x)=a\sqrt{3x^2+1}+\dfrac{3ax^2+b\sqrt{3}}{\sqrt{3x^2+1}},\ x\in\mathbb{R}$	**2p**
	Cum $F'(x)=f(x),\forall x\in\mathbb{R}$, prin identificarea coeficienților obținem $a=\dfrac{1}{2}, b=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.	**1p**
	Din $F(0)=0$ deducem că $c=0$, deci primitiva căutată este $F:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, F(x)=$ $=\dfrac{x}{2}\sqrt{3x^2+1}+\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\ln\left(x\sqrt{3}+\sqrt{3x^2+1}\right)$.	**2p**
c)	$\sqrt{3x^2+1}\ge 1,\ \forall x\in[-1,1]\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\ge\int_{-1}^{1}1\,dx=2$	**2p**
	$\sqrt{3x^2+1}\le\lvert x\rvert+1,\ \forall x\in[-1,1]\Rightarrow\int_{-1}^{1}f(x)\,dx\le\int_{-1}^{1}\left(\lvert x\rvert+1\right)dx=3$	**3p**