

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022

Proba E.c)

Matematică *M\_mate-info*

Varianta 1

Filiera teoretică, profil real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timp de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul  $a = (1 + \sqrt{2}) \cdot \{2022 + \sqrt{2}\}$  este număr natural, unde  $\{x\}$  reprezintă partea fracționară a numărului real  $x$ .
- 5p 2. Determinați mulțimea valorilor întregi ale numărului real  $m$ , pentru care reprezentarea graficului funcției  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x^2 + mx + 1$  nu intersectează axa  $Ox$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $\frac{\lg x}{\lg(x+2)} = \frac{1}{2}$ .
- 5p 4. Determinați  $n \in \mathbf{N}^*$  știind că numărul submulțimilor nevide cu un număr par de elemente ale unei mulțimi cu  $n$  elemente este 511.
- 5p 5. În reperul cartezian  $xOy$  se consideră punctul  $A(1,2)$  și dreapta  $d: 2x-3y+1=0$ . Determinați ecuația dreptei care trece prin  $A$  și este perpendiculară pe  $d$ .
- 5p 6. Determinați măsura unghiului  $A$  al unui triunghi  $ABC$ , știind că  $\sin A + \cos A = 0$ .

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

1. Se consideră matricea  $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{pmatrix}$ , unde  $i^2 = -1$  și  $a$  este număr real.
- 5p a) Arătați că  $\det A(0) = i$ .
- 5p b) Demonstrați că, pentru orice număr real  $a$ , matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p c) Calculați  $\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0)}_{\text{de 2022 ori}}$ .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru  $x \circ y = xy - 6x - 6y + 42$ .
- 5p a) Arătați că  $x \circ y = (x - 6)(y - 6) + 6$ , pentru orice numere reale  $x$  și  $y$ .
- 5p b) Determinați perechile de numere întregi  $(x, x')$ , unde  $x'$  este simetricul lui  $x$  în raport cu legea „ $\circ$ ”.
- 5p c) Calculați  $\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \frac{2022}{3} \circ \dots \circ \frac{2022}{2022}$ .

1. Se consideră funcția  $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x \cdot \arctg x - \ln(x^2 + 1)$ .

5p a) Arătați că  $f'(x) = \arctg x - \frac{x}{x^2 + 1}$ ,  $x \in \mathbf{R}$ .

5p b) Demonstrați că funcția  $f$  este convexă pe  $\mathbf{R}$ .

5p c) Fie funcția  $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $g(x) = f'(x)$ . Determinați imaginea funcției  $g$ .

2. Se consideră funcția  $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  $f(x) = x\sqrt{1-x}$ .

5p a) Calculați  $\int \frac{f^2(x)}{x} dx$ ,  $x \in (-\infty, 0)$ .

5p b) Determinați numerele reale  $a, b, c$  astfel încât funcția  $F: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbf{R}$ ,  
 $F(x) = (ax^2 + bx + c)\sqrt{1-x}$  să fie o primitivă a funcției  $f$ .

5p c) Fie  $G: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbf{R}$  o primitivă a funcției  $f$ . Calculați  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{G(x)}{\sqrt{(-x)^5}}$ .

Simulare județeană - Examenul național de bacalaureat, Ianuarie 2022

Proba E.c)

Matematică *M\_mate-info*

Barem de evaluare și de notare

Varianta 1

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică  
 Filiera vocațională, profil militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat de barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 puncte)

5p	1. $\{2022 + \sqrt{2}\} = \{\sqrt{2}\} = \sqrt{2} - [\sqrt{2}] = \sqrt{2} - 1$ $a = (\sqrt{2} + 1) \cdot (\sqrt{2} - 1) \Rightarrow a = 1 \in \mathbf{N}$	3p 2p
5p	2. $G_f \cap Ox = \emptyset \Leftrightarrow \Delta < 0$ $\Delta < 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow m \in (-2, 2) \cap \mathbf{Z} \Leftrightarrow m \in \{-1, 0, 1\}$	2p 3p
5p	3. $2 \lg x = \lg(x+2) \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0$ $x = -1$ , care nu convine, $x = 2$ , care convine	3p 2p
5p	4. Numărul submulțimilor nevide cu un număr par de elemente este: $C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + \dots = 2^{n-1} - C_n^0 = 2^{n-1} - 1$ $2^{n-1} - 1 = 511 \Leftrightarrow 2^{n-1} = 512 = 2^9 \Leftrightarrow n-1 = 9 \Leftrightarrow n = 10$	3p 2p
5p	5. $d: 2x - 3y + 1 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \Rightarrow m_d = \frac{2}{3}$ $a \perp d \Rightarrow m_a \cdot m_d = -1 \Rightarrow m_a \cdot \frac{2}{3} = -1 \Rightarrow m_a = -\frac{3}{2}$ Ecuația dreptei $a: y - y_A = m_a \cdot (x - x_A) \Leftrightarrow y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1) \Leftrightarrow 2y - 4 = -3x + 3 \Leftrightarrow a: 3x + 2y - 7 = 0$	3p 2p
5p	6. $\sin A + \cos A = 0 \Leftrightarrow tg A = -1$ $A \in (0, \pi) \Rightarrow A = \frac{3\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 puncte)

5p	1.a) $A(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det A(0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & i & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$ $= -i + 0 + 0 - (-2i) - 0 - 0 = i$	2p 3p
5p	b) $\det A(a) = \begin{vmatrix} 1 & a & 2 \\ a & i & a \\ -1 & a & -1 \end{vmatrix} = a^2 + i$ , pentru orice număr real $a$ Cum, pentru orice număr real $a$ , $a^2 + i \neq 0$ , obținem că $\det A(a) \neq 0$ , deci, pentru orice număr real $a$ , matricea $A(a)$ este inversabilă	2p 3p
5p	c) $A(0) \cdot A(0) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & i^2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -I_3$ $\underbrace{A(0) \cdot A(0) \cdot A(0) \cdot \dots \cdot A(0)}_{\text{de 2022 ori } A(0)} = \underbrace{(-I_3) \cdot (-I_3) \cdot (-I_3) \cdot \dots \cdot (-I_3)}_{\text{de 1011 ori } (-I_3)} = -I_3$	2p 3p

<b>5p</b>	<b>2. a)</b> $x \circ y = xy - 6x - 6y + 36 + 6 =$ $= x(y - 6) - 6(y - 6) + 6 = (x - 6)(y - 6) + 6$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5p</b>	<b>b)</b> Elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ” este 7 $x' \in \mathbf{Z}$ este simetricul lui $x \in \mathbf{Z}$ dacă $x \circ x' = x' \circ x = 7$ , de unde $x' = 6 + \frac{1}{x - 6}$ , $x \neq 6$ $x = 6$ nu este simetrizabil. Cum $x' \in \mathbf{Z}$ , obținem $x = 5$ sau $x = 7$ , de unde rezultă că $(x, x') \in \{(5, 5), (7, 7)\}$	<b>1p</b> <b>2p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	<b>c)</b> $x \circ 6 = 6$ și $6 \circ y = 6$ , pentru orice numere reale $x$ și $y$ Deoarece legea „ $\circ$ ” este asociativă, avem $\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \frac{2022}{3} \circ \dots \circ \frac{2022}{2022} =$ $= \underbrace{\left(\frac{2022}{1} \circ \frac{2022}{2} \circ \dots \circ \frac{2022}{336}\right)}_x \circ \frac{2022}{337} \circ \underbrace{\left(\frac{2022}{338} \circ \dots \circ \frac{2022}{2022}\right)}_y = x \circ 6 \circ y = (x \circ 6) \circ y = 6 \circ y = 6$	<b>2p</b> <b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 puncte)**

<b>5p</b>	<b>1. a)</b> $f'(x) = \arctg x + x \cdot \frac{1}{x^2+1} - \frac{2x}{x^2+1} = \arctg x - \frac{x}{x^2+1}$ , $x \in \mathbf{R}$	<b>5p</b>
<b>5p</b>	<b>b)</b> $f''(x) = \frac{1}{x^2+1} - \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2x^2}{(x^2+1)^2}$ , $x \in \mathbf{R}$ $\Rightarrow f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f$ convexă pe $\mathbf{R}$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	<b>c)</b> $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbf{R} \Rightarrow f'$ crescătoare pe $\mathbf{R} \Leftrightarrow g$ crescătoare pe $\mathbf{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$ , $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ și, cum $g$ este continuă pe $\mathbf{R}$ , rezultă că $\text{Im } g = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5p</b>	<b>2. a)</b> $\int \frac{f^2(x)}{x} dx = \int (x - x^2) dx =$ $= \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + C$	<b>3p</b> <b>2p</b>
<b>5p</b>	<b>b)</b> $F$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x)$ , $x \in (-\infty, 0)$ Se obțin valorile $a = \frac{2}{5}$ , $b = -\frac{2}{15}$ , $c = -\frac{4}{15}$	<b>2p</b> <b>3p</b>
<b>5p</b>	<b>c)</b> $F$ și $G$ primitive ale funcției $f \Rightarrow G(x) = F(x) + c = \left(\frac{2}{5}x^2 - \frac{2}{15}x - \frac{4}{15}\right)\sqrt{1-x} + c$ , $c \in \mathbf{R}$ $\lim_{x \rightarrow -\infty} G(x) = \infty$ , $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(-x)^5} = \infty$ și cum $G'(x) = f(x) = x\sqrt{1-x}$ , $x \in (-\infty, 0)$ , rezultă $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{G(x)}{\sqrt{(-x)^5}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{G'(x)}{(\sqrt{(-x)^5})'} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{\frac{5}{2}x\sqrt{-x}} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x\sqrt{1-x}}{x\sqrt{-x}} = \frac{2}{5} \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{1 - \frac{1}{x}} = \frac{2}{5} \cdot 1 = \frac{2}{5}$	<b>2p</b> <b>1p</b> <b>2p</b>