Simulare, Bacalaureat, 28 ianuarie 2022
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Filiera teoretică, profilul real, matematică-informatică ***Simulare***

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul efectiv de lucru este de trei ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Rezolvați în mulțimea numerelor complexe ecuația $z-2\overline{z}=1+3i$, unde $\overline{z}$ este conjugatul lui z.

5p **2.** Determinați parametrul real m pentru care $x^2+(m-1)x+m-1>0$, pentru orice număr x real.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{1+3x}=1-x$.

5p **4.** Determinați numărul funcțiilor $f:\{1,2,3\}\to\{0,1,2,3\}$ pentru care $f(1)$ este număr par.

5p **5.** Fie $ABCD$ paralelogram și P un punct astfel încât $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PD}$. Arătați că $\overrightarrow{BP}=\dfrac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.

5p **6.** Se dau numerele reale a și b pentru care $a+b=\dfrac{\pi}{3}$. Demonstrați că $\sin 2a-\sin 2b-\sin(a-b)=0$.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ și $A(x)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\x&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}$, unde x este număr real.

5p **a)** Arătați că $A(1)+A(-1)=2A(0)$.

5p **b)** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\det\left(A(x)+I_3\right)=0$.

5p **c)** Arătați că $\det\left(aI_3-b\cdot A(-1)+c\cdot A(-1)\cdot A(-1)\right)\geq 0$, pentru orice numere reale pozitive a,b,c.

2. Pe mulţimea $\mathbb{R}$ se defineşte legea de compoziţie asociativă $x*y=-xy+2x+2y-2$.

5p **a)** Arătați că $x*y=2-(x-2)(y-2)$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x, pentru care $x*x*x*x=1$.

5p **c)** Demonstrați că, dacă m, n și p sunt numere întregi astfel încât $m*n*p=2$, atunci produsul numerelor m, n și p este divizibil cu 2.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\dfrac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\dfrac{1}{e^2}$.

5p **c)** Demonstrați că pentru orice număr real a, cu $a \in \left(-\sqrt{2}, -1\right)$, ecuația $f(x) = a$ are exact două soluții reale distincte.

2. Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1}$.

5p **a)** Calculați $\int \left(x^2 + 1\right) \cdot f(x)\, dx$.

5p **b)** Determinați funcția $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, primitivă a funcției f, pentru care $G(1) = \ln 2$.

5p **c)** Calculați $\int f'(x) \cdot e^{f(x)} dx$.

Simulare, Bacalaureat, 28 ianuarie 2022
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluţie corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracţiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parţiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărţirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 puncte)**

1.	$z=a+bi,\ a,b\in\mathbb{R}$ $a+bi-2\left(a-bi\right)=1+3i$ $-a+3bi=1+3i\Rightarrow a=-1,\ b=1$ $z=-1+i$	**2p** **2p** **1p**
2.	$\Delta<0$ $\Delta=(m-1)^2-4(m-1)=m^2-6m+5$ $m^2-6m+5<0\Rightarrow m\in(1,5)$	**1p** **2p** **2p**
3.	$1+3x\geq0,\ 1-x\geq0$, domeniul de existență $x\in[-\frac{1}{3},1]$ $1+3x=(1-x)^2\Rightarrow x^2-5x=0\Rightarrow x_1=0,x_2=5$ $x_1=0$ este soluție	**2p** **2p** **1p**
4.	Dacă $f\left(1\right)=0$ putem alege valorile $f\left(2\right)$ și $f\left(3\right)$ în 4^2 moduri. Dacă $f\left(1\right)=2$ putem alege valorile $f\left(2\right)$ și $f\left(3\right)$ în 4^2 moduri. Sunt $2\cdot4^2=32$ funcții cu proprietatea cerută.	**2p** **2p** **1p**
5.	Dacă $\overrightarrow{BP}=2\overrightarrow{PD}$, atunci $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$. Dar $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$, deci $\overrightarrow{BP}=\frac{2}{3}\left(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}\right)$.	**2p** **3p**
6.	Avem $\sin2a-\sin2b=2\sin\left(a-b\right)\cdot\cos(a+b)$ $\sin(a-b)\cdot\left[2\cos(a+b)-1\right]=\sin(a-b)\cdot(2\cos\frac{\pi}{3}-1)=\sin\left(a-b\right)\cdot\left(2\cdot\frac{1}{2}-1\right)=0$	**2p** **3p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 puncte)**

1. a)	$A(1)+A(-1)=\begin{pmatrix}0&0&-1\\1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0&-1\\-1&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-2\\0&0&0\\0&-2&0\end{pmatrix}$	**3p**
	$=2\cdot\begin{pmatrix}0&0&-1\\0&0&0\\0&-1&0\end{pmatrix}=2\cdot A(0).$	**2p**
b)	$A(x)+I_3=\begin{pmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow$	**2p**
	$\Rightarrow\det\left(A(x)+I_3\right)=\begin{vmatrix}1&0&-1\\x&1&0\\0&-1&1\end{vmatrix}=1+x=0\Rightarrow x=-1$	**3p**
c)	$aI_3-b\cdot A(-1)+c\cdot A(-1)\cdot A(-1)=\begin{pmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{pmatrix}$	
	$\det\left(aI_3-b\cdot A(-1)+c\cdot A(-1)\cdot A(-1)\right)=\begin{vmatrix}a&c&b\\b&a&c\\c&b&a\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=(a+b+c)\left(a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc\right)=$	**2p**
	$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right]\geq 0$ pentru orice numere reale pozitive a,b,c .	**1p**
2. a)	$x*y=-xy+2x+2y-4+2=$	**1p**
	$=-x(y-2)+2(y-2)+2=$,	**2p**
	$=2-(x-2)(y-2)$ pentru orice numere reale x și y .	**2p**
b)	$x*x=2-(x-2)^2\Rightarrow$	**1p**
	$x*x*x*x=\left[2-(x-2)^2\right]*\left[2-(x-2)^2\right]=$	**2p**
	$=2-(x-2)^4=1\Rightarrow$ x=1 sau x=3.	**2p**
c)	Deoarece $m*n*p=2+(m-2)(n-2)(p-2)$	**2p**
	se obține $(m-2)(n-2)(p-2)=0$, m =2 sau n=2 sau p =2,	**2p**
	deci produsul $m\cdot n\cdot p$ este divizibil cu 2.	**1p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 puncte)**

1. a)	$f'(x)=\dfrac{x'\sqrt{x^2+2x+2}-x\left(\sqrt{x^2+2x+2}\right)'}{x^2+2x+2}=$ $=\dfrac{\sqrt{x^2+2x+2}-\dfrac{x^2+x}{\sqrt{x^2+2x+2}}}{x^2+2x+2}=$ $=\dfrac{x+2}{\left(x^2+2x+2\right)\sqrt{x^2+2x+2}},x\in\mathbb{R}$	**2p** **2p** **1p**
b)	$\lim\limits_{x\to\infty}\left(f(x)\right)^{2x}=\left(1^\infty\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2}{x^2+2x+2}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{-2x-2}{x^2+2x+2}\right)^{\frac{x^2+2x+2}{-2x-2}}\right]^{\frac{(-2x-2)x}{x^2+2x+2}}=$ $=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-2x^2-2x}{x^2+2x+2}}=e^{-2}=\dfrac{1}{e^2}$	**3p** **2p**
c)	Considerăm o funcție $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(x)-a$ continuă și derivabilă pe $\mathbb{R}$ și $g'(x)=f'(x)$ pentru orice x real, g este strict descrescătoare pe $(-\infty,-2)$ și strict crescătoare pe $(-2,+\infty)$ Deoarece $\lim\limits_{x\to-\infty}g(x)=-1-a>0$, $g(-2)=-\sqrt{2}-a<0$, $\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=1-a>0$ pentru orice $a\in\left(-\sqrt{2},-1\right)$, ecuația $f(x)=a$ are exact două soluții reale distincte.	**2p** **2p** **1p**
2. a)	$\int\left(x^2+1\right)\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx=\int\left(x^2+2x+1\right)dx=\int x^2dx+2\int xdx+\int 1dx=$ $=\dfrac{x^3}{3}+x^2+x+c$, unde $c\in\mathbb{R}$	**3p** **2p**
b)	$G(x)=\int\dfrac{x^2+2x+1}{x^2+1}dx=\int 1\,dx+\int\dfrac{2x}{x^2+1}dx=x+\ln\left(x^2+1\right)+c$, c este real $G(1)=1+\ln 2+k=\ln 2$, unde $k\in\mathbb{R}\Rightarrow k=-1$ $G(x)=x+\ln\left(x^2+1\right)-1.$	**2p** **2p** **1p**
c)	$f(x)=t,$ $f'(x)dx=dt$ $\quad\int e^tdt=e^t+c\Rightarrow$ $\Rightarrow\int f'(x)\cdot e^{f(x)}dx=e^{f(x)}+c$, unde $c\in\mathbb{R}$.	**3p** **2p**