

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(1 + 3i)^2 - 6i = -8$, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 3x - 7$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor celor două funcții.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{3-x} = 2x$.
- 5p** 4. Arătați că numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ este egal cu numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A .
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1, 2)$, $B(-1, 0)$ și $C(0, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că dreapta AB conține punctul C .
- 5p** 6. Se consideră numărul real $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ astfel încât $\cos x + \sin \frac{\pi}{6} = 1$. Calculați $\sin x$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -2 & -6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ și $M(x) = A + xB$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 0$.
- 5p** b) Demonstrați că $M(x) \cdot M(1) = xM(1)$, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați numărul natural n , știind că $M(4) \cdot M(3) \cdot M(2) \cdot M(1) = nM(1)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x + y + x^2 y^2$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2 = 7$.
- 5p** b) Demonstrați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați numerele întregi x pentru care $(-2) * x \leq 3$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^4 - 2x + 2$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = e^x + 4x^3 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este convexă.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \frac{1}{x}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^3 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) dx = 4$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$.
- 5p** c) Determinați cel mai mare număr natural nenul n pentru care $\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1} f^n(x) dx \geq \frac{1}{2021}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(1+3i)^2 - 6i = 1 + 6i + 9i^2 - 6i =$ $= 1 - 9 = -8$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow x + 1 = 3x - 7$ Coordonatele punctului de intersecție sunt $x = 4$ și $y = 5$	3p 2p
3.	$3 - x = 4x^2 \Rightarrow 4x^2 + x - 3 = 0$ $x = -1$, care nu convine; $x = \frac{3}{4}$, care convine	3p 2p
4.	Numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A este egal cu $C_5^2 = \frac{5!}{3! \cdot 2!} = 10$ Numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A este egal cu $C_5^3 = \frac{5!}{2! \cdot 3!} = 10$, deci numărul de submulțimi cu două elemente ale mulțimii A este egal cu numărul de submulțimi cu trei elemente ale mulțimii A	2p 3p
5.	$m_{AB} = 1$, $m_{AC} = -a + 2$, unde a este număr real $m_{AB} = m_{AC}$, de unde obținem $a = 1$	2p 3p
6.	$\sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, deci $\cos x + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \cos x = \frac{1}{2}$ $\sin^2 x + \frac{1}{4} = 1 \Leftrightarrow \sin^2 x = \frac{3}{4}$ și, cum $x \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$, obținem că $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) =$ $= -4 + 4 = 0$	3p 2p
b)	$M(1) = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $M(x) = \begin{pmatrix} 2-2x & 4-6x \\ -1+x & -2+3x \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $M(x) \cdot M(1) = \begin{pmatrix} 0 & -2x \\ 0 & x \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = xM(1)$, pentru orice număr real x	2p 3p
c)	$M(4) \cdot M(3) \cdot (M(2) \cdot M(1)) = M(4) \cdot M(3) \cdot (2M(1)) = 2M(4) \cdot (M(3) \cdot M(1)) = 2 \cdot 3 \cdot 4M(1)$ Cum $2 \cdot 3 \cdot 4M(1) = nM(1)$, obținem $n = 24$	3p 2p
2.a)	$1 * 2 = 1 + 2 + 1^2 \cdot 2^2 =$ $= 1 + 2 + 4 = 7$	3p 2p

b)	$x * 0 = x + 0 + 0 = x$, pentru orice număr real x	2p
	$0 * x = 0 + x + 0 = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p
c)	$-2 + x + 4x^2 \leq 3$, deci $4x^2 + x - 5 \leq 0$	2p
	$x \in \left[-\frac{5}{4}, 1\right]$ și, cum x este număr întreg, obținem $x = -1$ sau $x = 0$ sau $x = 1$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (e^x)' + (x^4)' - (2x)' + (2)' =$	2p
	$= e^x + 4x^3 - 2 + 0 = e^x + 4x^3 - 2, x \in \mathbb{R}$	3p
b)	$f(0) = 3, f'(0) = -1$	2p
	Ecuția tangentei este $y - f(0) = f'(0)(x - 0)$, adică $y = -x + 3$	3p
c)	$f''(x) = e^x + 12x^2, x \in \mathbb{R}$	3p
	$f''(x) \geq 0$, pentru orice număr real x , deci funcția f este convexă	2p
2.a)	$\int_1^3 f(x) dx = \int_1^3 \left(x - \frac{1}{x} + \frac{1}{x}\right) dx = \int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 =$	3p
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	2p
b)	$\int_1^2 \left(f(x) + \frac{1}{x}\right) \ln x dx = \int_1^2 x \ln x dx = \int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}\right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^2 - \int_1^2 \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx =$	3p
	$= \frac{4}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{x^2}{4} \Big _1^2 = 2 \ln 2 - \frac{3}{4}$	2p
c)	$\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1} f^n(x) dx = \int_1^{\sqrt{2}} x (x^2 - 1)^n dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{2}} (x^2 - 1)' (x^2 - 1)^n dx = \frac{(x^2 - 1)^{n+1}}{2(n+1)} \Big _1^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2(n+1)}$	3p
	Cum $2(n+1) \leq 2021 \Leftrightarrow n \leq \frac{2019}{2}$, obținem că 1009 este cel mai mare număr natural nenul pentru care $\int_1^{\sqrt{2}} x^{n+1} f^n(x) dx \geq \frac{1}{2021}$	2p