

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numărul complex $z = 3 + 2i$. Arătați că $z + \frac{13}{z} = 6$.
- 5p 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - 5$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 + x$. Determinați numărul real a pentru care $(f \circ g)(a) = (f \circ g)(-a)$.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{3x+5} = 9 \cdot 3^{x+1}$.
- 5p 4. Se consideră A , o mulțime cu 4 elemente. Calculați probabilitatea ca, alegând o mulțime din mulțimea submulțimilor lui A , aceasta să aibă un număr impar de elemente.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(1,3)$, $B(3,5)$ și $C(0,6)$. Determinați ecuația dreptei d care trece prin punctul A și este paralelă cu mediana din vârful C a triunghiului ABC .
- 5p 6. Calculați lungimea laturii BC a triunghiului ABC , știind că $AB = 2$, $AC = 2\sqrt{3}$ și $B = \frac{\pi}{3}$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră a un număr real nenul și matricea $A(x) = \begin{pmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(x)) = a$, pentru orice număr real x .
- 5p b) Determinați numărul real nenul a astfel încât $A(x) \cdot A(y) = A(x+y)$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Pentru $a = 1$, determinați matricea $X \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(2) \cdot X = A(3)$.
2. Pe mulțimea $M = [0, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \log_2(2^x + 2^y - 1)$.
- 5p a) Arătați că $0 * 2021 = 2021$.
- 5p b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * (x+1) * (x+2) = \log_2 54$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1-x^2}{2(x^2+1)\sqrt{(x^2+x+1)(x^2+1)}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+x+1}{x^2+1}} + \sqrt{\frac{x^2-x+1}{x^2+1}} \leq \sqrt{6}$, pentru orice număr real x .
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 3 - 2 \ln x$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = 14$.

- 5p** b) Calculați $\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx$.
- 5p** c) Arătați că $\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică $M_{\text{șt-nat}}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$z + \frac{13}{z} = 3 + 2i + \frac{13}{3 + 2i} = 3 + 2i + \frac{13(3 - 2i)}{9 - 4i^2} = 3 + 2i + \frac{13(3 - 2i)}{13} = 3 + 2i + 3 - 2i = 6$	3p 2p
2.	$f(g(a)) = f(g(-a)) \Leftrightarrow 3g(a) - 5 = 3g(-a) - 5 \Leftrightarrow g(a) = g(-a)$ $a^2 + a = a^2 - a \Leftrightarrow a = 0$	3p 2p
3.	$3^{3x+5} = 3^2 \cdot 3^{x+1} \Leftrightarrow 3^{3x+5} = 3^{x+3}$ $3x + 5 = x + 3 \Rightarrow x = -1$	3p 2p
4.	Numărul submulțimilor lui A este egal cu 2^4 , deci sunt 16 cazuri posibile Numărul submulțimilor lui A cu un număr impar de elemente este egal cu $C_4^1 + C_4^3 = 8$, deci sunt 8 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	$M(2, 4)$ este mijlocul segmentului AB , deci $m_{CM} = -1$ $d \parallel CM \Rightarrow m_d = -1$, deci ecuația dreptei d este $y - y_A = m_d(x - x_A)$, adică $y = -x + 4$	2p 3p
6.	$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cdot \cos B \Rightarrow 12 = 4 + BC^2 - 2 \cdot 2 \cdot BC \cdot \frac{1}{2}$ $BC^2 - 2BC - 8 = 0 \Rightarrow BC = 4$	3p 2p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} 1+2x & 0 & -4x \\ 0 & a & 0 \\ x & 0 & 1-2x \end{vmatrix} = a(1+2x)(1-2x) + 4ax^2 =$ $= a(1 - 4x^2) + 4ax^2 = a$, pentru orice număr real x	3p 2p
b)	$A(x) \cdot A(y) = \begin{pmatrix} 1+2(x+y) & 0 & -4(x+y) \\ 0 & a^2 & 0 \\ x+y & 0 & 1-2(x+y) \end{pmatrix}$, $A(x+y) = \begin{pmatrix} 1+2(x+y) & 0 & -4(x+y) \\ 0 & a & 0 \\ x+y & 0 & 1-2(x+y) \end{pmatrix}$, pentru orice numere reale x și y $A(x) \cdot A(y) = A(x+y) \Rightarrow a^2 = a$ și, cum a un număr real nenul, obținem $a = 1$	3p 2p
c)	$A(-2) \cdot A(2) = A(0) = I_3$, deci $A(-2)$ este inversa matricei $A(2)$ $X = A(-2) \cdot A(3) \Rightarrow X = A(1) \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$0 \cdot 2021 = \log_2(2^0 + 2^{2021} - 1) = \log_2(1 + 2^{2021} - 1) =$ $= \log_2 2^{2021} = 2021$	3p 2p

b)	$x * e = x \Leftrightarrow \log_2(2^x + 2^e - 1) = x \Leftrightarrow 2^x + 2^e - 1 = 2^x$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, de unde obținem $2^e = 1$, deci $e = 0 \in M$	3p
	Cum $0 * x = \log_2(1 + 2^x - 1) = x$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, obținem că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	2p
c)	$x * (x + 1) * (x + 2) = \log_2(2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} - 2)$, $x \in M$	3p
	$\log_2(2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} - 2) = \log_2 54 \Rightarrow 7 \cdot 2^x - 2 = 54 \Rightarrow 2^x = 8$, deci $x = 3$, care convine	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}} \cdot \left(\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} \right)' =$	2p
	$= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{x^2 + 1}{x^2 + x + 1}} \cdot \frac{(2x + 1)(x^2 + 1) - (x^2 + x + 1) \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{2(x^2 + 1)\sqrt{(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)}}$, $x \in \mathbb{R}$	3p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}}{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 1$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in (-\infty, -1] \Rightarrow f$ descrescătoare pe $(-\infty, -1]$, $f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [-1, 1] \Rightarrow f$ crescătoare pe $[-1, 1]$ și $f'(x) \leq 0$, pentru orice $x \in [1, +\infty) \Rightarrow f$ descrescătoare pe $[1, +\infty)$	2p
	$f(-1) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $f(1) = \frac{\sqrt{6}}{2}$ și $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1 \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq \frac{\sqrt{6}}{2}$, pentru orice număr real x , deci $\sqrt{2} \leq f(x) + f(-x) \leq \sqrt{6} \Rightarrow \sqrt{2} \leq \sqrt{\frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}} + \sqrt{\frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}} \leq \sqrt{6}$, pentru orice număr real x	3p
2.a)	$\int_1^3 (f(x) + 2 \ln x) dx = \int_1^3 (2x + 3 - 2 \ln x + 2 \ln x) dx = \int_1^3 (2x + 3) dx = \left(x^2 + 3x \right) \Big _1^3 =$	3p
	$= 9 + 9 - 1 - 3 = 14$	2p
b)	$\int_1^e (2x + 3 - f(x)) dx = 2 \int_1^e \ln x dx = 2x \ln x \Big _1^e - 2 \int_1^e x \cdot \frac{1}{x} dx =$	3p
	$= 2e - 2(e - 1) = 2$	2p
c)	$\int_0^1 x^2 f(x^3 + 1) dx = \frac{1}{3} \int_1^2 f(t) dt = \frac{1}{3} \left(\int_1^2 (2t + 3) dt - 2 \int_1^2 \ln t dt \right) =$	3p
	$= \frac{1}{3} \left(t^2 + 3t - 2t \ln t + 2t \right) \Big _1^2 = \frac{1}{3} (4 + 6 - 4 \ln 2 + 4 - 1 - 3 - 2) = \frac{4(2 - \ln 2)}{3}$	2p