

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Se consideră progresia geometrică $(b_n)_{n \geq 1}$ cu $b_2 = 2$ și $b_4 = 4$. Determinați b_6 .
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 2x + m$, unde m este număr real. Determinați numărul real m pentru care vârful parabolei asociate funcției f este situat pe dreapta $y = 3x$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$.
- 5p** 4. Determinați numărul de numere naturale de trei cifre care au exact două cifre egale.
- 5p** 5. Segmentele AB și $A'B'$ au același mijloc. Demonstrați că $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \vec{0}$.
- 5p** 6. Demonstrați că, în orice triunghi ABC , are loc relația $AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră sistemul de ecuații
$$\begin{cases} ax + (a+1)y + (a+2)z = a \\ bx + (b+1)y + (b+2)z = b \\ y + z = 1 \end{cases}$$
 și matricea $X(a,b) = \begin{pmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, unde a și b sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(X(0,1)) = 1$.
- 5p** b) Demonstrați că, pentru orice numere reale distincte a și b , sistemul de ecuații are soluție unică.
- 5p** c) Demonstrați că, dacă (x_0, y_0, z_0) este soluție a sistemului de ecuații, atunci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 3$, pentru orice număr real a .
2. Pe mulțimea $M = (2, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = (x-1)^{\log_3(y-1)} + 1$.
- 5p** a) Arătați că $5 * 10 = 17$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „*”.
- 5p** c) Determinați $x \in M$ pentru care $x * x * x = x * x$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Demonstrați că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f , este paralelă cu dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.
2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2 + 3} \right)$.
- 5p** a) Arătați că $\int_0^1 \left(2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \frac{\pi}{4}$.
- 5p** b) Demonstrați că orice primitivă F a funcției f este strict crescătoare.

- 5p** c) Arătați că, pentru orice numere reale a și b , cu $a < b$, $\int_a^b f(x)F^2(x)dx > 0$, pentru orice primitivă F a funcției f .

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Simulare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$b_4^2 = b_2 \cdot b_6 \Rightarrow 4^2 = 2b_6$ $b_6 = 8$	3p 2p
2.	$x_V = 1, y_V = m - 1$, unde $V(x_V, y_V)$ este vârful parabolei asociate funcției f $y_V = 3x_V \Leftrightarrow m - 1 = 3$, deci $m = 4$	2p 3p
3.	$2^{2x} - 2 \cdot 2^x - 3 = 0 \Rightarrow (2^x + 1)(2^x - 3) = 0$ Cum $2^x > 0$, obținem $x = \log_2 3$	3p 2p
4.	Numerele naturale de trei cifre care au exact două cifre egale sunt de forma $\overline{aab}$, $\overline{aba}$ sau $\overline{baa}$, unde a și b sunt cifre distincte Sunt $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{aab}$, $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{aba}$ și $9 \cdot 9 = 81$ de numere de forma $\overline{baa}$ cu a și b cifre distincte, deci numărul cerut este $81 \cdot 3 = 243$	2p 3p
5.	$\overline{AM} = \overline{MB}$ și $\overline{A'M} = \overline{MB'}$, unde M este mijlocul segmentelor AB , respectiv $A'B'$ $\overline{AB'} + \overline{BA'} = \overline{AM} + \overline{MB'} + \overline{BM} + \overline{MA'} = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$	2p 3p
6.	$2R = \frac{BC}{\sin A} = \frac{AC}{\sin B} = \frac{AB}{\sin C}$ $BC = 2R \sin A$, $AC = 2R \sin B$ și $AB = 2R \sin C \Rightarrow AB + AC + BC = 2R(\sin A + \sin B + \sin C)$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$X(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(X(0,1)) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - 1 = 1$	2p 3p
b)	$\det(X(a,b)) = \begin{vmatrix} a & a+1 & a+2 \\ b & b+1 & b+2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = b - a$, pentru orice numere reale a și b Pentru $a \neq b$, $\det(X(a,b)) \neq 0$, deci sistemul de ecuații are soluție unică	3p 2p
c)	Dacă $a \neq b$, sistemul are soluția unică $(0, 2, -1)$ și $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = 2^2 - (-1)^2 - 2a \cdot 0 = 3$, pentru orice număr real a Dacă $a = b$, sistemul are soluțiile $(\alpha, 2 + a\alpha, -1 - a\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$, deci $y_0^2 - z_0^2 - 2ax_0 = (2 + a\alpha)^2 - (-1 - a\alpha)^2 - 2a\alpha = 4 + 4a\alpha + a^2\alpha^2 - 1 - 2a\alpha - a^2\alpha^2 - 2a\alpha = 3$, pentru orice număr real a	2p 3p
2.a)	$5 * 10 = (5 - 1)^{\log_3(10-1)} + 1 = 4^{\log_3 9} + 1 =$ $= 4^2 + 1 = 17$	3p 2p

b)	$x * e = x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)} + 1 = x \Leftrightarrow (x-1)^{\log_3(e-1)} = x-1$, pentru orice $x \in M$, de unde obținem $\log_3(e-1) = 1$, deci $e = 4 \in M$	3p
	Cum $4 * x = 3^{\log_3(x-1)} + 1 = (x-1) + 1 = x$, pentru orice $x \in M$, obținem că $e = 4$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”	2p
c)	$x * x = (x-1)^{\log_3(x-1)} + 1$, $x * x * x = (x-1)^{\log_3^2(x-1)} + 1$, pentru orice $x \in M$	2p
	Cum $x \in M$, $(x-1)^{\log_3(x-1)} = (x-1)^{\log_3^2(x-1)} \Rightarrow \log_3(x-1) = \log_3^2(x-1)$, deci $\log_3(x-1) = 0$ sau $\log_3(x-1) = 1$ și, cum $x > 2$, obținem $x = 4$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{2e^{2x} + 4x^3}{2\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}} =$	3p
	$= \frac{2(e^{2x} + 2x^3)}{2\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}} = \frac{e^{2x} + 2x^3}{\sqrt{e^{2x} + x^4 + 2}}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	Panta tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f , este egală cu $f'(0) = \frac{1}{\sqrt{3}}$	2p
	Cum dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$ are panta egală cu $\frac{1}{\sqrt{3}}$, obținem că tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x = 0$, situat pe graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $x - \sqrt{3}y = 0$	3p
c)	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = e^{2x} + 2x^3 \Rightarrow g'(x) = 2e^{2x} + 6x^2 > 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, deci funcția g este strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ și, cum $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ și g este continuă, există un unic număr real c cu $g(c) = 0$	2p
	f este continuă pe $\mathbb{R}$ și $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, c) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, c]$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (c, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $[c, +\infty)$, deci f are un unic punct de extrem	3p
2.a)	$\int_0^1 \left(2f(x) + \frac{1}{x^2 + 3} \right) dx = \int_0^1 \frac{1}{x^2 + 1} dx = \arctg x \Big _0^1 =$	3p
	$= \arctg 1 - \arctg 0 = \frac{\pi}{4}$	2p
b)	$F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției $f \Rightarrow F'(x) = f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2 + 3 - (x^2 + 1)}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} =$	3p
	$= \frac{1}{(x^2 + 1)(x^2 + 3)} > 0$, pentru orice număr real x , deci funcția F este strict crescătoare	2p
c)	$\int_a^b f(x) F^2(x) dx = \int_a^b F^2(x) F'(x) dx = \frac{1}{3} F^3(x) \Big _a^b = \frac{1}{3} (F^3(b) - F^3(a))$	3p
	Cum F este strict crescătoare, obținem că $F(a) < F(b)$, pentru orice numere reale a și b , cu $a < b$, deci $\int_a^b f(x) F^2(x) dx > 0$	2p