Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de trei ore.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

5p **1.** Determinați termenul a_1 al progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge 1}$, știind că $a_3 = 19$ și $a_4 = 25$.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x) = 2x + a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a, știind că $f(2) = 8$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{2-x} - \frac{1}{625}\cdot 25^x = 0$.

5p **4.** Determinați câte submulțimi cu două elemente are mulțimea $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,2)$, $B(2,0)$ și $C(8,2)$. Determinați lungimea segmentului DE, unde punctele D și E sunt mijloacele segmentelor OA, respectiv BC.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC, dreptunghic în A, cu $AB = 6$ și $B = \frac{\pi}{6}$. Arătați că raza cercului circumscris triunghiului ABC este egală cu $2\sqrt{3}$.

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ și $M(a) = \begin{pmatrix} a & 1 \\ 2-2a & 2-a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det A = 2$.

5p **b)** Determinați numărul real x pentru care $M(2)\cdot A = xM(1)$.

5p **c)** Determinați numerele reale a pentru care $(M(a) - 2I_2)\cdot M(a) = (a+2)I_2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = (x-6)(y-6) + 6$.

5p **a)** Arătați că $9 \circ 8 = 12$.

5p **b)** Arătați că $e = 7$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”.

5p **c)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $x \circ \frac{6}{x} = 6x$.

SUBIECTUL al III-lea (30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - 5)\sqrt{x}$.

5p **a)** Arătați că $f'(x) = \frac{5(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}}$, $x \in (0,+\infty)$.

5p **b)** Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f'(x)}{x\sqrt{x}} = \frac{5}{2}$.

5p **c)** Arătați că $f(x+2) - f(x) \le 26$, pentru orice $x \in (0,2]$.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + 4\ln x$.

5p **a)** Arătați că $\int_1^2 (f(x) - 4\ln x)\,dx = \frac{7}{3}$.

5p **b)** Arătați că $\int_1^e \frac{f(x) - x^2}{x}\,dx = 2$.

5p **c)** Determinați numărul real m pentru care $\int_1^2 \left(f(x)f''(x) + (f'(x))^2\right)dx = m(f(2) - f(1))$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	Rația progresiei este $r = a_4 - a_3 = 6$	**3p**
	$a_1 = a_3 - 2r = 7$	**2p**
2.	$f(2) = 4 + a$	**2p**
	$4 + a = 8$, de unde obținem $a = 4$	**3p**
3.	$5^{2-x} - 5^{-4} \cdot 5^{2x} = 0$, deci $5^{2-x} = 5^{2x-4}$, de unde obținem $2 - x = 2x - 4$	**3p**
	$x = 2$	**2p**
4.	$C_6^2 = \dfrac{6!}{2! \cdot 4!} =$	**3p**
	$= 15$	**2p**
5.	$D(1,1)$ și $E(5,1)$	**2p**
	$DE = 4$	**3p**
6.	$\cos B = \dfrac{AB}{BC}$, deci $\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \dfrac{6}{BC}$, de unde obținem $BC = 4\sqrt{3}$	**3p**
	$R = \dfrac{BC}{2}$, unde R este raza cercului circumscris triunghiului ABC, deci $R = 2\sqrt{3}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - (-1) \cdot 2 =$	**3p**
	$= 0 + 2 = 2$	**2p**
b)	$M(2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$, $M(2) \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2M(1)$	**3p**
	$2M(1) = xM(1)$, de unde obținem $x = 2$	**2p**
c)	$M(a) - 2I_2 = \begin{pmatrix} a-2 & 1 \\ 2-2a & -a \end{pmatrix}$, $(M(a) - 2I_2) \cdot M(a) = \begin{pmatrix} a^2 - 4a + 2 & 0 \\ 0 & a^2 - 4a + 2 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a	**3p**
	$\begin{pmatrix} a^2 - 4a + 2 & 0 \\ 0 & a^2 - 4a + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+2 & 0 \\ 0 & a+2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $a = 0$ sau $a = 5$	**2p**
2.a)	$9 \circ 8 = (9-6)(8-6) + 6 =$	**3p**
	$= 6 + 6 = 12$	**2p**
b)	$x \circ 7 = (x-6)(7-6) + 6 = x - 6 + 6 = x$, pentru orice număr real x	**2p**
	$7 \circ x = (7-6)(x-6) + 6 = x - 6 + 6 = x$, pentru orice număr real x, deci $e = 7$ este elementul neutru al legii de compoziție „$\circ$”	**3p**

c)	$x\circ\frac{6}{x}=\frac{6(x-6)(1-x)}{x}+6$, pentru orice număr real nenul x	**2p**
	$\frac{6(x-6)(1-x)}{x}+6=6x \Leftrightarrow x^2-4x+3=0$, de unde obținem $x=1$ sau $x=3$, care convin	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x\sqrt{x}+\left(x^2-5\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}=$	**3p**
	$=\frac{5x^2-5}{2\sqrt{x}}=\frac{5(x-1)(x+1)}{2\sqrt{x}}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f'(x)}{x\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5(x-1)(x+1)}{2x^2}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5x^2\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2x^2}=$	**3p**
	$=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{5\left(1-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x}\right)}{2}=\frac{5}{2}$	**2p**
c)	$f'(x)=0\Rightarrow x=1$; pentru orice $x\in(0,1]$, $f'(x)\le 0$, deci f este descrescătoare pe $(0,1]$ și, pentru orice $x\in[1,+\infty)$, $f'(x)\ge 0$, deci f este crescătoare pe $[1,+\infty)$	**2p**
	$x\in(0,2]\Rightarrow x+2\in(2,4]$, deci $f(x)\ge f(1)$ și $f(x+2)\le f(4)$ și, cum $f(1)=-4$ și $f(4)=22$, obținem $f(x+2)-f(x)\le 26$, pentru orice $x\in(0,2]$	**3p**
2.a)	$\int_1^2\left(f(x)-4\ln x\right)dx=\int_1^2 x^2dx=\left.\frac{x^3}{3}\right\|_1^2=$	**3p**
	$=\frac{8}{3}-\frac{1}{3}=\frac{7}{3}$	**2p**
b)	$\int_1^e\frac{f(x)-x^2}{x}dx=\int_1^e\frac{4\ln x}{x}dx=4\int_1^e\ln x(\ln x)'dx=2\ln^2 x\Big\|_1^e=$	**3p**
	$=2\ln^2 e-2\ln^2 1=2$	**2p**
c)	$\int_1^2\left(f(x)f''(x)+\left(f'(x)\right)^2\right)dx=\int_1^2\left(f(x)f'(x)\right)'dx=\left(f(x)f'(x)\right)\Big\|_1^2=f(2)f'(2)-f(1)f'(1)$	**3p**
	$f'(x)=2x+\frac{4}{x}$, $x\in(0,+\infty)$; $f'(1)=f'(2)=6$, deci $6\left(f(2)-f(1)\right)=m\left(f(2)-f(1)\right)$ și, cum $f(1)\ne f(2)$, obținem $m=6$	**2p**