

Examenul național de bacalaureat 2025

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Se consideră numerele complexe $z_1 = 4 + i$ și $z_2 = 2 - 4i$. Arătați că $i \cdot z_1 + z_2 = 1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 3x + 5$. Determinați numerele reale a pentru care punctul $A(a, 5)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_6(7x - 5) = \log_6(x + 1) + \frac{1}{\log_x 6}$.
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să fie multiplu impar al lui 9.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 0)$, $B(2, 4)$ și $C(5, a)$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că dreptele OB și AC sunt paralele.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC , cu $AB = 6$, $BC = 10$ și $\cos B = \frac{4}{5}$. Arătați că aria triunghiului ABC este egală cu 18.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ și $B(x) = \begin{pmatrix} 1 & x & 0 \\ 0 & 1 & x \\ -x & 0 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det A = 1$.
- 5p b) Arătați că $A - B(x) \cdot A = xI_3$, pentru orice număr real x .
- 5p c) Pentru fiecare număr real x se consideră matricea $C(x)$ astfel încât $A \cdot C(x) = B(x)$. Arătați că $C(x) - C(y) = (y - x)A$, pentru orice numere reale x și y .
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = x^2 y + xy^2 + x + y$.
- 5p a) Arătați că $1 * 3 = 16$.
- 5p b) Determinați numerele reale nenule x pentru care $x * \frac{2}{x} = 9x$.
- 5p c) Determinați perechile (m, n) de numere întregi, cu $m \leq n$, pentru care $m * n = 1$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Determinați mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + x^2 - 1$.
- 5p a) Arătați că $\int_1^4 (f(x) - e^x) dx = 18$.
- 5p b) Arătați că $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x) - x^2} dx = \ln(e+1)$.
- 5p c) Demonstrați că $\int_0^1 \frac{x}{f(x)+1} dx \leq 1 - \frac{2}{e}$.

Examenul național de bacalaureat 2025
Proba E. c)
Matematică *M* *mate-info*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

| | | |
|----|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1. | $i \cdot z_1 + z_2 = 4i + i^2 + 2 - 4i =$ $= -1 + 2 = 1$ | 3p 2p |
| 2. | $f(a) = 5$, de unde obținem $a^2 - 3a = 0$ $a = 0$ sau $a = 3$ | 3p 2p |
| 3. | $\log_6(7x - 5) = \log_6(x^2 + x)$, deci $7x - 5 = x^2 + x$, de unde obținem $x^2 - 6x + 5 = 0$ $x = 1$, care nu convine, sau $x = 5$, care convine | 3p 2p |
| 4. | Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre, numerele 27, 45, 63, 81 și 99 sunt multiplii impari de 9, deci sunt 5 cazuri favorabile, de unde obținem $p = \frac{5}{90} = \frac{1}{18}$ | 2p 3p |
| 5. | $m_{OB} = 2$ $m_{AC} = \frac{a}{3}$ și, cum $m_{OB} = m_{AC}$, obținem $a = 6$ | 2p 3p |
| 6. | $\sin B = \frac{3}{5}$ $\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot BC \cdot \sin B}{2} = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{3}{5} = 18$ | 3p 2p |

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

| | | |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------|
| 1.a) | $\det A = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-1) \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot 0 \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 - 0 \cdot (-1) \cdot 0 =$ $= 0 + 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = 1$ | 3p 2p |
| b) | $B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} -x & 0 & 1 \\ -1 & -x & 0 \\ 0 & -1 & -x \end{pmatrix}$, $A - B(x) \cdot A = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix} =$ $= x \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = xI_3$, pentru orice număr real x | 3p 2p |
| c) | $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $C(x) = A^{-1} \cdot B(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -x \\ x & 0 & -1 \\ 1 & x & 0 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real x $C(x) - C(y) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -x + y \\ x - y & 0 & 0 \\ 0 & x - y & 0 \end{pmatrix} = (y - x)A$, pentru orice numere reale x și y | 3p 2p |

| | | |
|-------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| 2.a) | $1 * 3 = 1^2 \cdot 3 + 1 \cdot 3^2 + 1 + 3 =$ $= 3 + 9 + 4 = 16$ | 3p 2p |
| b) | $x * \frac{2}{x} = \frac{3x^2 + 6}{x}$, pentru orice număr real nenul x $\frac{3x^2 + 6}{x} = 9x$, de unde obținem $x = -1$ sau $x = 1$, care convin | 3p 2p |
| c) | $m * n = (m + n)(mn + 1)$, pentru orice numere întregi m și n $(m + n)(mn + 1) = 1$ și, cum m și n sunt numere întregi, cu $m \leq n$, obținem perechile $(0, 1)$ și $(-2, 1)$ | 2p 3p |

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

| | | |
|-------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------|
| 1.a) | $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^3 - 3x^2 \ln x}{x^6} =$ $= \frac{x^2 - 3x^2 \ln x}{x^6} = \frac{1 - 3 \ln x}{x^4}$, $x \in (0, +\infty)$ | 3p 2p |
| b) | $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{3x^2} = 0$ Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptota orizontală spre $+\infty$ la graficul funcției f | 3p 2p |
| c) | $f'(x) = 0 \Rightarrow x = \sqrt[3]{e}$; pentru orice $x \in (0, \sqrt[3]{e}]$, $f'(x) \geq 0$, deci f este crescătoare pe $(0, \sqrt[3]{e}]$ și, pentru orice $x \in [\sqrt[3]{e}, +\infty)$, $f'(x) \leq 0$, deci f este descrescătoare pe $[\sqrt[3]{e}, +\infty)$ $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $f(\sqrt[3]{e}) = \frac{1}{3e}$ și f este continuă, deci mulțimea numerelor reale m pentru care ecuația $f(x) = m$ are cel puțin o soluție este $(-\infty, \frac{1}{3e}]$ | 2p 3p |
| 2.a) | $\int_1^4 (f(x) - e^x) dx = \int_1^4 (x^2 - 1) dx = \left(\frac{x^3}{3} - x \right) \Big _1^4 =$ $= \frac{64}{3} - 4 - \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = 18$ | 3p 2p |
| b) | $\int_1^2 \frac{e^x}{f(x) - x^2} dx = \int_1^2 \frac{e^x}{e^x - 1} dx = \int_1^2 \frac{(e^x - 1)'}{e^x - 1} dx = \ln(e^x - 1) \Big _1^2 =$ $= \ln(e^2 - 1) - \ln(e - 1) = \ln(e + 1)$ | 3p 2p |
| c) | $\int_0^1 \frac{x}{f(x) + 1} dx = \int_0^1 \frac{x}{e^x + x^2} dx$ și, cum $e^x + x^2 \geq e^x$, pentru orice $x \in [0, 1]$, obținem relația $\int_0^1 \frac{x}{f(x) + 1} dx \leq \int_0^1 x e^{-x} dx$ $\int_0^1 x e^{-x} dx = \int_0^1 x (-e^{-x})' dx = -e^{-x} (x + 1) \Big _0^1 = 1 - \frac{2}{e}$, deci $\int_0^1 \frac{x}{f(x) + 1} dx \leq 1 - \frac{2}{e}$ | 3p 2p |