

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $2(1-2i)+i(4+i)=1$, unde $i^2=-1$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+ax-a$, unde a este număr real. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(3,-3)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x^2+8)=\log_2(8-2x)$.
- 5p 4. Determinați câte numere naturale de două cifre distincte, cu cifra zecilor pară, se pot forma cu elementele mulțimii $A=\{1,2,3,4,5\}$.
- 5p 5. În sistemul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(4,0)$. Determinați coordonatele punctului C pentru care $\overline{OA}+\overline{OB}=\overline{OC}$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC , cu $AB=5$, $C=\frac{\pi}{4}$ și înălțimea $AD=4$. Arătați că $BC=7$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A(a)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a & -1 & a \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p a) Arătați că $\det(A(1))=1$.
- 5p b) Arătați că $A(a)\cdot A(b)=A(a)-A(b)+I_3$, pentru orice numere reale a și b .
- 5p c) Determinați matricea $X\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ pentru care $A(1)\cdot X\cdot A(0)=I_3$.
2. Pe mulțimea $M=[3,+\infty)$ se definește legea de compoziție $x\circ y=m(x-3)(y-3)+3$, unde $m\in(0,+\infty)$.
- 5p a) Arătați că $3\circ 5=3$, pentru orice $m\in(0,+\infty)$.
- 5p b) Pentru $m=2$, arătați că $e=\frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”.
- 5p c) Se consideră funcția $f:M\rightarrow M$, $f(x)=3+\sqrt{x-3}$. Pentru $m=1$, arătați că $f(x\circ y)=f(x)\circ f(y)$, pentru orice $x, y\in M$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f:(1,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=x-\frac{e^{-x}}{x-1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x-1)^2+xe^{-x}}{(x-1)^2}$, $x\in(1,+\infty)$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x}{(x^2 + 1)^2}$.

5p a) Arătați că $\int_1^3 f(x)(x^2 + 1)^2 dx = 4$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 f(x) dx = \frac{1}{4}$.

5p c) Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{xf(x)} dx$. Arătați că

$$I_n - I_{n+4} = \frac{2}{(n+2)(n+4)}, \text{ pentru orice număr natural nenul } n.$$

Examenul național de bacalaureat 2024
Proba E. c)

Matematică $M_mate-info$

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$2(1-2i) + i(4+i) = 2 - 4i + 4i + i^2 =$ $= 2 + (-1) = 1$	3p 2p
2.	$f(3) = -3 \Rightarrow 9 + 3a - a = -3$ $a = -6$	3p 2p
3.	$x^2 + 8 = 8 - 2x$, de unde obținem $x^2 + 2x = 0$ $x = -2$ sau $x = 0$, care convin	3p 2p
4.	Cifra zecilor se poate alege în 2 moduri Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 4 moduri, deci se pot forma $2 \cdot 4 = 8$ numere	2p 3p
5.	$\overline{OA} = 3\vec{j}$, $\overline{OB} = 4\vec{i}$ $\overline{OC} = 4\vec{i} + 3\vec{j}$, deci punctul C are coordonatele $(4,3)$	2p 3p
6.	$DC = 4$ $BD = 3$, deci $BC = BD + DC = 3 + 4 = 7$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1)) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 0 - (-1) - 0 - 0 = 1$	2p 3p
b)	$A(a) \cdot A(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -b+a & 1 & a-b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a-b & 0 & a-b \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = A(a) - A(b) + I_3$, pentru orice numere reale a și b	3p 2p
c)	$(A(1))^{-1} = A(1)$, $(A(0))^{-1} = A(0)$ $X = (A(1))^{-1} \cdot (A(0))^{-1}$, de unde obținem $X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$3 \circ 5 = m(3-3)(5-3) + 3 =$ $= m \cdot 0 \cdot 2 + 3 = 3$, pentru orice $m \in (0, +\infty)$	3p 2p

b)	$x \circ \frac{7}{2} = 2(x-3)\left(\frac{7}{2}-3\right) + 3 = x-3+3 = x$, pentru orice $x \in M$	2p
	$\frac{7}{2} \circ x = 2\left(\frac{7}{2}-3\right)(x-3) + 3 = x-3+3 = x$, pentru orice $x \in M$, deci $e = \frac{7}{2}$ este elementul neutru al legii de compoziție „ \circ ”	3p
c)	$f(x \circ y) = 3 + \sqrt{(x-3)(y-3)} + 3 - 3 = 3 + \sqrt{(x-3)(y-3)} =$ $= 3 + (3 + \sqrt{x-3} - 3)(3 + \sqrt{y-3} - 3) = (f(x) - 3)(f(y) - 3) + 3 = f(x) \circ f(y)$, pentru orice $x, y \in M$	2p
		3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = 1 - \frac{-e^{-x}(x-1) - e^{-x}}{(x-1)^2} =$	3p
	$= 1 + \frac{xe^{-x}}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 + xe^{-x}}{(x-1)^2}$, $x \in (1, +\infty)$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{e^{-x}}{x(x-1)}\right) = 1$	3p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{e^{-x}}{x-1}\right) = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptota oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(1, +\infty)$, deci f este injectivă	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -\infty$ și f este continuă, deci f este surjectivă, de unde obținem că f este bijectivă	3p
2.a)	$\int_1^3 f(x)(x^2+1)^2 dx = \int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 =$	3p
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	2p
b)	$\int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 \frac{x}{(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(x^2+1)'}{(x^2+1)^2} dx = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2+1} \Big _0^1 =$	3p
	$= -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	2p
c)	$I_n = \int_0^1 x^n \sqrt{xf(x)} dx = \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x^2+1} dx$, pentru orice număr natural nenul n	2p
	$I_n - I_{n+4} = \int_0^1 \frac{x^{n+1}(1-x^4)}{x^2+1} dx = \int_0^1 x^{n+1}(1-x^2) dx = \frac{x^{n+2}}{n+2} \Big _0^1 - \frac{x^{n+4}}{n+4} \Big _0^1 = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+4} =$ $= \frac{2}{(n+2)(n+4)}$, pentru orice număr natural nenul n	3p