

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că $(\sqrt{8} + 1) \cdot (2\sqrt{2} - 1) - \sqrt{36} = 1$.
- 5p** 2. Se consideră funcțiile $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 5x - 1$ și $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = 5 + 2x$. Determinați coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 + 6x} = x$.
- 5p** 4. Determinați probabilitatea ca, alegând un număr n din mulțimea $A = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, numărul $4 \cdot n$ să fie element al mulțimii A .
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2, 1)$, $B(3, 4)$ și C , astfel încât punctul A este mijlocul segmentului BC . Arătați că triunghiul AOC este dreptunghic isoscel.
- 5p** 6. Se consideră triunghiul ascuțitunghic ABC în care $\sin 30^\circ \cdot \sin A = \cos 60^\circ \cdot \cos A$. Calculați $\operatorname{tg} A$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$, $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $B(a) = \begin{pmatrix} 0 & a-2 \\ 1 & 3a \end{pmatrix}$, unde a este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det A = 3$.
- 5p** b) Determinați numărul real x pentru care $A \cdot A + A = 2B(x)$.
- 5p** c) Determinați numărul real a pentru care $\det(B(a) \cdot A + B(3a)) = 4$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = (xy + 1)(x + y)$.
- 5p** a) Arătați că $1 * 2 = 9$.
- 5p** b) Arătați că $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care numărul $N = n * \frac{1}{n}$ este întreg.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x-1)e^x - \frac{x^2}{2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = x(e^x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = 0$.
- 5p** c) Arătați că $f(x) \leq f(x^2)$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$.
2. Se consideră funcția $f: (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{4x}{x+4}$.
- 5p** a) Arătați că $\int_1^2 (x+4)f(x) dx = 6$.
- 5p** b) Arătați că $\int_1^4 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = 4 \ln 2$.
- 5p** c) Demonstrați că orice primitivă a funcției f este convexă.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)
Matematică $M_{tehnologic}$
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(\sqrt{8}+1) \cdot (2\sqrt{2}-1) - \sqrt{36} = (2\sqrt{2})^2 - 1 - 6 =$ $= 8 - 7 = 1$	3p 2p
2.	$f(x) = g(x) \Leftrightarrow 5x - 1 = 5 + 2x$ Coordonatele punctului de intersecție a graficelor funcțiilor f și g sunt $x = 2$ și $y = 9$	2p 3p
3.	$x^2 + 6x = x^2$ $x = 0$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele n din mulțimea A pentru care numărul $4 \cdot n$ este element al mulțimii A sunt 0, 1 și 2, deci sunt 3 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{3}{10}$	2p 2p 1p
5.	$2 = \frac{3+x_C}{2}$ și $1 = \frac{4+y_C}{2}$, deci punctul C are coordonatele $x_C = 1$ și $y_C = -2$ $OA = \sqrt{5}$, $OC = \sqrt{5}$ și $AC = \sqrt{10}$, deci $OA^2 + OC^2 = AC^2$, de unde obținem că triunghiul AOC este dreptunghic isoscel	2p 3p
6.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$ $\frac{1}{2} \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot \cos A$, deci $\sin A = \cos A$, de unde obținem $\tan A = 1$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -6 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-3) - (-6) \cdot 2 =$ $= -9 + 12 = 3$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot A + A = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 2 & -6 \end{pmatrix}$ $A \cdot A + A = 2 \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 2B(-1)$, de unde obținem $x = -1$	2p 3p
c)	$B(a) \cdot A = \begin{pmatrix} 2a-4 & -3a+6 \\ 3+6a & -6-9a \end{pmatrix}$, $B(3a) = \begin{pmatrix} 0 & 3a-2 \\ 1 & 9a \end{pmatrix}$, deci $B(a) \cdot A + B(3a) = \begin{pmatrix} 2a-4 & 4 \\ 4+6a & -6 \end{pmatrix}$, pentru orice număr real a $\det(B(a) \cdot A + B(3a)) = -36a + 8$, pentru orice număr real a , deci $-36a + 8 = 4 \Rightarrow a = \frac{1}{9}$	3p 2p

2.a)	$1 * 2 = (1 \cdot 2 + 1)(1 + 2) =$ $= 3 \cdot 3 = 9$	3p 2p
b)	$x * 0 = (x \cdot 0 + 1)(x + 0) = 1 \cdot x = x$, pentru orice număr real x $0 * x = (0 \cdot x + 1)(0 + x) = 1 \cdot x = x$, pentru orice număr real x , deci $e = 0$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”	2p 3p
c)	$N = 2\left(n + \frac{1}{n}\right) = 2n + \frac{2}{n}$, pentru orice număr natural nenul n N este număr întreg, deci $\frac{2}{n}$ este număr întreg și, cum n este număr natural nenul, obținem $n = 1$ sau $n = 2$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x + (x-1)e^x - \frac{2x}{2} =$ $= xe^x - x = x(e^x - 1)$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f'(x)}{(x^2)'} =$ $= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x - 1)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{2} = 0$	2p 3p
c)	$f'(x) \geq 0$, pentru orice $x \in \mathbb{R} \Rightarrow f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ Cum $x \leq 0 \leq x^2$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$, obținem $f(x) \leq f(x^2)$, pentru orice $x \in (-\infty, 0]$	2p 3p
2.a)	$\int_1^2 (x+4)f(x) dx = \int_1^2 4x dx = 2x^2 \Big _1^2 =$ $= 8 - 2 = 6$	3p 2p
b)	$\int_1^4 \frac{1}{x} \cdot f(x^2) dx = 2 \int_1^4 \frac{2x}{x^2 + 4} dx = 2 \int_1^4 (x^2 + 4)' \cdot \frac{1}{x^2 + 4} dx = 2 \ln(x^2 + 4) \Big _1^4 =$ $= 2 \ln 20 - 2 \ln 5 = 4 \ln 2$	3p 2p
c)	Dacă $F : (-4, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ este o primitivă a funcției f , atunci $F'(x) = f(x)$, pentru orice $x \in (-4, +\infty)$ $F''(x) = f'(x) = \frac{16}{(x+4)^2} > 0$, pentru orice $x \in (-4, +\infty)$, deci orice primitivă a funcției f este convexă	2p 3p