

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{șt-nat}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $N = \log_2 24 - \log_2 12 + 3$ este pătratul unui număr natural.
- 5p** 2. Determinați numărul real a pentru care punctul $A(a, a^2)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x - 1$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 2x - 2} = x - 2$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A = \{1!, 2!, 3!, \dots, 10!\}$, acesta să fie divizibil cu 9.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC și punctul D mijlocul segmentului BC . Arătați că, pentru orice puncte E și F astfel încât $\overline{AE} = \overline{FD}$, are loc relația $2(\overline{EB} + \overline{FC}) = \overline{AB} + \overline{AC}$.
- 5p** 6. Arătați că $(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 2 \cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x) = \begin{pmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$, unde x este număr real.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(-1)) = 3$.
- 5p** b) Demonstrați că matricea $A(x)$ este inversabilă, pentru orice număr real x .
- 5p** c) Determinați matricea $X \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ pentru care $A(1) \cdot X \cdot A(1) = A(2)$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă și cu element neutru $x \circ y = xy - \sqrt{2}(x + y - 1) + 2$.
- 5p** a) Arătați că $\sqrt{2} \circ 0 = \sqrt{2}$.
- 5p** b) Determinați numerele reale x pentru care $(x - \sqrt{2}) \circ (x + \sqrt{2}) = x$.
- 5p** c) Determinați numerele raționale al căror simetric în raport cu legea de compoziție „ $\circ$ ” este număr rațional.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$, $f(x) = x \left(1 - \frac{1}{x} \ln(x^2 + 1)\right)$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}$, $x \in (0, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați numărul natural nenul n , știind că tangenta la graficul funcției f în punctul $A(n, f(n))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y = \frac{1}{5}x + 1$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este bijectivă.

2. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{2\ln x}{x^3}$ și funcția $F:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$, $F(x)=\frac{\ln x}{x^2}$, o primitivă a lui f .

5p a) Arătați că $\int_1^e x^2 \left(f(x) + \frac{2\ln x}{x^3} \right) dx = 1$.

5p b) Arătați că $\int_1^{\sqrt{5}} x \cdot f(x^2 + 3) dx = -\frac{5\ln 2}{128}$.

5p c) Determinați numerele reale a pentru care $\int_e^{e^2} x \cdot F(x) dx = \frac{a^2 - 1}{2}$.

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică *M_șt-nat*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$N = \log_2 \frac{24}{12} + 3 = \log_2 2 + 3 =$ $= 1 + 3 = 4 = 2^2$	3p 2p
2.	$f(a) = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 2a + 1 = 0$ $a = 1$	3p 2p
3.	$x^2 - 2x - 2 = (x - 2)^2 \Rightarrow x^2 - 2x - 2 = x^2 - 4x + 4$ $x = 3$, care convine	3p 2p
4.	Mulțimea A are 10 elemente, deci sunt 10 cazuri posibile Numerele divizibile cu 9 din mulțimea A sunt $6!$, $7!$, $8!$, $9!$ și $10!$, deci sunt 5 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{2}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FD} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$ $2(\overrightarrow{EB} + \overrightarrow{FC}) = 2\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$	2p 3p
6.	$(\sin x + \cos x)^2 - (\sin x - \cos x)^2 = 4 \sin x \cos x =$ $= 2 \sin 2x = 2 \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2x \right)$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(-1)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} =$ $= 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-2) = 3$	2p 3p
b)	$\det(A(x)) = \begin{vmatrix} x^2 & 1 \\ x-1 & 1 \end{vmatrix} = x^2 - x + 1$, pentru orice număr real x Cum $\det(A(x)) \neq 0$ pentru orice număr real x , obținem că matricea $A(x)$ este inversabilă pentru orice număr real x	3p 2p
c)	$A(1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow (A(1))^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ Cum $A(2) = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ și $X = (A(1))^{-1} \cdot A(2) \cdot (A(1))^{-1}$, obținem $X = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	2p 3p
2.a)	$\sqrt{2} \circ 0 = \sqrt{2} \cdot 0 - \sqrt{2}(\sqrt{2} + 0 - 1) + 2 =$ $= -2 + \sqrt{2} + 2 = \sqrt{2}$	3p 2p

b)	$x^2 - 2 - \sqrt{2}(x - \sqrt{2} + x + \sqrt{2} - 1) + 2 = x \Leftrightarrow x^2 - (2\sqrt{2} + 1)x + \sqrt{2} = 0$ $x = \sqrt{2} - 1$ sau $x = \sqrt{2} + 2$	3p 2p
c)	$e = \sqrt{2} + 1$ este elementul neutru al legii de compoziție „ $\circ$ ”, deci a este simetrizabil în raport cu „ $\circ$ ” dacă și numai dacă există a' , astfel încât $a \circ a' = a' \circ a = \sqrt{2} + 1$ $aa' - \sqrt{2}(a + a' - 1) + 2 = \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow aa' + 1 - \sqrt{2}(a + a') = 0$ deci, dacă a și a' sunt numere raționale, obținem $a + a' = 0$ și $aa' = -1$, deci $a = -1$ sau $a = 1$, care convin	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \left(x - \ln(x^2 + 1) \right)' = 1 - \frac{1}{x^2 + 1} \cdot 2x =$ $= \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{(x-1)^2}{x^2 + 1}, x \in (0, +\infty)$	3p 2p
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul A este paralelă cu dreapta de ecuație $y = \frac{1}{5}x + 1$, deci $f'(n) = \frac{1}{5}$ $5(n-1)^2 = n^2 + 1 \Leftrightarrow 2n^2 - 5n + 2 = 0$ și, cum n este număr natural nenul, obținem $n = 2$	3p 2p
c)	$f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (0, 1) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(0, 1)$, $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (1, +\infty) \Rightarrow f$ strict crescătoare pe $(1, +\infty)$ și, cum f este continuă în $x = 1$, obținem că f este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, deci injectivă Cum $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ și f este continuă și strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, obținem că f este surjectivă, deci bijectivă	2p 3p
2.a)	$\int_1^e x^2 \left(f(x) + \frac{2 \ln x}{x^3} \right) dx = \int_1^e \frac{1}{x} dx = \ln x \Big _1^e =$ $= \ln e - \ln 1 = 1$	3p 2p
b)	$\int_1^{\sqrt{5}} x \cdot f(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} \int_1^{\sqrt{5}} (x^2 + 3)' \cdot f(x^2 + 3) dx = \frac{1}{2} F(x^2 + 3) \Big _1^{\sqrt{5}} =$ $= \frac{1}{2} \left(\frac{\ln 8}{64} - \frac{\ln 4}{16} \right) = -\frac{5 \ln 2}{128}$	3p 2p
c)	$\int_e^{e^2} x F(x) dx = \int_e^{e^2} \frac{\ln x}{x} dx = \frac{\ln^2 x}{2} \Big _e^{e^2} = \frac{\ln^2(e^2) - \ln^2 e}{2} = \frac{3}{2}$ $\frac{a^2 - 1}{2} = \frac{3}{2}$, de unde obținem $a = -2$ sau $a = 2$	3p 2p