

Examenul național de bacalaureat 2022
Proba E. c)

Matematică $M_{\text{mate-info}}$

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numerele $6 - 3\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice.
- 5p** 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + mx + 1$, unde m este număr real. Determinați numerele reale m pentru care axa Ox este tangentă graficului funcției f .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^{x+2} = 5^x + 24$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte, acesta să aibă cifra zecilor multiplu de 3.
- 5p** 5. Se consideră triunghiul ABC , punctul D mijlocul laturii AC și punctul M astfel încât $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$. Arătați că dreptele MD și AB sunt paralele.
- 5p** 6. Calculați lungimea laturii AB a triunghiului ABC , în care $AC = 3$ și măsurile unghiurilor A și B sunt de 30° , respectiv 60° .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ și $A(z) = aI_3 + bB$, unde $z = a + ib$, cu a și b numere reale și $i^2 = -1$.
- 5p** a) Arătați că $\det B = i$.
- 5p** b) Demonstrați că $A(z_1) \cdot A(z_2) = A(z_1 z_2)$, pentru orice numere complexe z_1 și z_2 .
- 5p** c) Determinați numărul natural n pentru care $A(1+i) \cdot A(2+i) \cdot A(3+i) \cdot A(1-i) \cdot A(2-i) \cdot A(3-i) = nI_3$.
2. Pe $M = [1, +\infty)$ se definește legea de compoziție asociativă $x * y = \log_2(2^{x+y} - 2^{x+1} - 2^{y+1} + 6)$.
- 5p** a) Arătați că $x * y = \log_2((2^x - 2)(2^y - 2) + 2)$, pentru orice $x, y \in M$.
- 5p** b) Determinați elementul neutru al legii de compoziție „ $*$ ”.
- 5p** c) Arătați că $x * x * x < 3x$, pentru orice $x \in M$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^3 + 3x + 1)e^{-x}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = (2 - x)(x^2 - x + 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p** b) Arătați că $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - e^{-x}}{f(x) + e^{-x}} \right)^{f(x)e^x} = e^{-2}$.
- 5p** c) Demonstrați că funcția $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = \left| \frac{f(x)}{e^{-x}} - 1 \right|$ are un singur punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f : (1, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \ln(x-1)$.
- 5p a) Arătați că $\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)} dx = 10$.
- 5p b) Demonstrați că $F(\sqrt{7}) < F(3)$, pentru orice primitivă F a funcției f .
- 5p c) Determinați numărul real m , știind că $\int_3^5 f(x) dx = m(4 \ln 2 - 1)$.

Examenul național de bacalaureat 2022

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$(6 - 3\sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 3(2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 3 = (\sqrt{3})^2$, deci numerele $6 - 2\sqrt{3}$, $\sqrt{3}$ și $2 + \sqrt{3}$ sunt termeni consecutivi ai unei progresii geometrice	3p 2p
2.	Axa Ox este tangentă graficului funcției $f \Leftrightarrow \Delta = 0 \Leftrightarrow m^2 - 4 = 0$ $m = -2$ sau $m = 2$	3p 2p
3.	$25 \cdot 5^x - 5^x = 24$, deci $5^x = 1$ $x = 0$	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte are 81 de elemente, deci sunt 81 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre distincte sunt $3 \cdot 9 = 27$ de numere care au cifra zecilor multiplu de 3, deci sunt 27 de cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{1}{3}$	2p 2p 1p
5.	$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{MC} = \vec{0}$, deci $3(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC}) + 2\overrightarrow{AB} = \vec{0}$ și, cum $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MD}$, obținem $\overrightarrow{MD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ Vectorii $\overrightarrow{MD}$ și $\overrightarrow{AB}$ sunt coliniari, deci dreptele MD și AB sunt paralele	3p 2p
6.	Unghiul C are măsura egală cu 90° , deci triunghiul ABC este dreptunghic în C $\sin B = \frac{\sqrt{3}}{2}$ și, cum $AC = 3$, obținem $AB = 2\sqrt{3}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det B = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & i & 0 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \cdot i \cdot (-1) + 0 + 0 - (-2) \cdot i \cdot 1 - 0 - 0 = -i + 2i = i$	3p 2p
b)	Cum $B \cdot B = -I_3$, $A(z_1) \cdot A(z_2) = (aI_3 + bB)(cI_3 + dB) = acI_3 + adB + bcB + bdB \cdot B = (ac - bd)I_3 + (ad + bc)B = A(z_1 z_2)$, pentru orice $z_1 = a + ib$ și $z_2 = c + id$, cu a, b, c și d numere reale	3p 2p
c)	$A(1+i) \cdot A(2+i) \cdot A(3+i) \cdot A(1-i) \cdot A(2-i) \cdot A(3-i) = A((1+i)(2+i)(3+i)(1-i)(2-i)(3-i)) = A((1+i)(1-i)(2+i)(2-i)(3+i)(3-i)) = A(2 \cdot 5 \cdot 10) = 100I_3$, deci $n = 100$	2p 3p

Probă scrisă la matematică *M_mate-info*

Model

Barem de evaluare și de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

2.a)	$x * y = \log_2 \left(2^x (2^y - 2) - 2^{y+1} + 4 + 2 \right) =$ $= \log_2 \left(2^x (2^y - 2) - 2(2^y - 2) + 2 \right) = \log_2 \left((2^x - 2)(2^y - 2) + 2 \right)$, pentru orice $x, y \in M$	3p 2p
b)	$x * e = x$ pentru orice $x \in M$, unde e este elementul neutru al legii de compoziție, deci $(2^x - 2)(2^e - 3) = 0$ pentru orice $x \in M$, de unde obținem $e = \log_2 3 \in M$ Cum $(\log_2 3) * x = x$ pentru orice $x \in M$, obținem că $e = \log_2 3$ este elementul neutru al legii de compoziție „*”	3p 2p
c)	$x * x * x = \log_2 \left((2^x - 2)^3 + 2 \right)$, pentru orice $x \in M$ $(x * x * x) - 3x = \log_2 \left(\frac{(2^x - 2)^3 + 2}{2^{3x}} \right) = \log_2 \left(1 - \frac{6(2^x - 1)^2}{2^{3x}} \right) < 0$, pentru orice $x \in M$, de unde obținem că $x * x * x < 3x$, pentru orice $x \in M$	3p 2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = (x^3 + 3x + 1)'e^{-x} + (x^3 + 3x + 1)(e^{-x})' = (3x^2 + 3)e^{-x} - (x^3 + 3x + 1)e^{-x} =$ $= (-x^3 + 3x^2 - 3x + 2)e^{-x} = (2 - x)(x^2 - x + 1)e^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$	3p 2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{f(x) - e^{-x}}{f(x) + e^{-x}} \right)^{f(x)e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^3 + 3x}{x^3 + 3x + 2} \right)^{x^3 + 3x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{-2}{x^3 + 3x + 2} \right)^{\frac{x^3 + 3x + 2}{-2} \cdot \frac{-2(x^3 + 3x + 1)}{x^3 + 3x + 2}} =$ $= e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2(x^3 + 3x + 1)}{x^3 + 3x + 2}} = e^{-2}$	3p 2p
c)	$g(x) = x^3 + 3x = \begin{cases} -x^3 - 3x, & x \in (-\infty, 0) \\ x^3 + 3x, & x \in [0, +\infty) \end{cases}$ g este continuă și, cum pentru orice $x \in (-\infty, 0)$, $g'(x) = -3x^2 - 3 < 0 \Rightarrow g$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0)$ și pentru orice $x \in (0, +\infty)$, $g'(x) = 3x^2 + 3 > 0 \Rightarrow g$ este strict crescătoare pe $(0, +\infty)$, obținem că funcția g are un singur punct de extrem	2p 3p
2.a)	$\int_4^6 \frac{f(x)}{\ln(x-1)} dx = \int_4^6 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _4^6 =$ $= 18 - 8 = 10$	3p 2p
b)	F este o primitivă a lui f , deci $F'(x) = f(x) = x \ln(x-1)$, de unde obținem că $F'(x) > 0$, pentru orice $x \in (2, +\infty)$, deci F este strict crescătoare pe $(2, +\infty)$ Cum $2 < \sqrt{7} < 3$, obținem că $F(\sqrt{7}) < F(3)$	3p 2p
c)	$\int_3^5 f(x) dx = \int_3^5 \left(\frac{x^2 - 1}{2} \right)' \ln(x-1) dx = \frac{x^2 - 1}{2} \ln(x-1) \Big _3^5 - \frac{1}{2} \int_3^5 \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} dx =$ $= 12 \ln 4 - 4 \ln 2 - \frac{1}{2} \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _3^5 = 20 \ln 2 - 5 = 5(4 \ln 2 - 1)$, de unde obținem $m = 5$	3p 2p