

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că $\left(0,25 \cdot 10 - \frac{1}{2}\right)\left(0,25 \cdot 10 + \frac{1}{2}\right) = 6$.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - ax + 1$, unde a este număr real. Determinați numărul real a , știind că punctul $A(2,1)$ aparține graficului funcției f .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $3^{x+2} + 3^x = 30$.
- 5p 4. Un obiect costă 500 de lei. Determinați prețul obiectului după o scumpire cu 20%.
- 5p 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(0,3)$ și $B(8,3)$. Punctul M este mijlocul segmentului AB . Calculați distanța de la punctul M la punctul $O(0,0)$.
- 5p 6. Se consideră triunghiul ABC dreptunghic în A , cu $AB=5$ și $AC=10$. Calculați aria triunghiului ABC .

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricele $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ și $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
- 5p a) Arătați că $\det A = -1$.
- 5p b) Arătați că $A \cdot A - 3A = I_2$.
- 5p c) Se consideră matricea $X = \begin{pmatrix} 1 & x \\ y & 1 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale. Determinați numerele reale x și y pentru care $A \cdot X - X \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 4xy + x + y$.
- 5p a) Arătați că $3 \circ 2 = 29$.
- 5p b) Demonstrați că $x \circ y = \frac{(4x+1)(4y+1)-1}{4}$, pentru orice numere reale x și y .
- 5p c) Determinați mulțimea valorilor reale ale lui x pentru care $x \circ x \leq 2$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x + \frac{x}{x^2+1}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = e^x + \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că $\frac{2-e}{2e} \leq f(x) \leq \frac{2e+1}{2}$, pentru orice $x \in [-1,1]$.

2. Se consideră funcția $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x+1)\sqrt{x}$.

5p a) Arătați că $\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \frac{5}{2}$.

5p b) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$, este egal cu $\frac{17\pi}{12}$.

5p c) Determinați numărul real a , știind că $\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x} \ln x}{x+1} dx = \frac{e^2 + a}{4}$.

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_tehnologic*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$\left(0,25 \cdot 10 - \frac{1}{2}\right) \left(0,25 \cdot 10 + \frac{1}{2}\right) = (2,5 - 0,5)(2,5 + 0,5) =$ $= 2 \cdot 3 = 6$	2p 3p
2.	$f(2) = 1 \Rightarrow 4 - 2a + 1 = 1$ $a = 2$	3p 2p
3.	$3^x(3^2 + 1) = 30 \Leftrightarrow 3^x = 3$ $x = 1$	3p 2p
4.	$\frac{20}{100} \cdot 500 = 100$ de lei Prețul după scumpire este $500 + 100 = 600$ de lei	3p 2p
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(4,3)$ $OM = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2} = 5$	2p 3p
6.	$\mathcal{A}_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC}{2} =$ $= \frac{5 \cdot 10}{2} = 25$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 3 =$ $= 2 - 3 = -1$	3p 2p
b)	$A \cdot A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $A \cdot A - 3A = \begin{pmatrix} 4 & 9 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$	3p 2p
c)	$A \cdot X = \begin{pmatrix} 1+3y & x+3 \\ 1+2y & x+2 \end{pmatrix}, X \cdot A = \begin{pmatrix} 1+x & 3+2x \\ y+1 & 3y+2 \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale $\begin{pmatrix} 1+3y & x+3 \\ 1+2y & x+2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1+x & 3+2x \\ y+1 & 3y+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3y-x & -x \\ y & x-3y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$, de unde obținem $x = -1$ și $y = -1$	2p 3p
2.a)	$3 \circ 2 = 4 \cdot 3 \cdot 2 + 3 + 2 =$ $= 24 + 5 = 29$	3p 2p

b)	$x \circ y = \frac{16xy + 4x + 4y}{4} = \frac{16xy + 4x + 4y + 1 - 1}{4} =$	3p
	$= \frac{4x(4y+1) + (4y+1) - 1}{4} = \frac{(4x+1)(4y+1) - 1}{4}, \text{ pentru orice numere reale } x \text{ și } y$	2p
c)	$x \circ x = \frac{(4x+1)^2 - 1}{4}, \text{ pentru orice număr real } x$	2p
	$\frac{(4x+1)^2 - 1}{4} \leq 2 \Leftrightarrow (4x+1)^2 \leq 9 \Leftrightarrow -3 \leq 4x+1 \leq 3, \text{ de unde obținem } x \in \left[-1, \frac{1}{2}\right]$	3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = e^x + \frac{1 \cdot (x^2 + 1) - x \cdot 2x}{(x^2 + 1)^2} =$	3p
	$= e^x + \frac{x^2 + 1 - 2x^2}{(x^2 + 1)^2} = e^x + \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x + \frac{x}{x^2 + 1} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(e^x + \frac{1}{x + \frac{1}{x}} \right) = 0$	3p
	Dreapta de ecuație $y = 0$ este asimptotă orizontală spre $-\infty$ la graficul funcției f	2p
c)	$x \in [-1, 1] \Rightarrow 1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow f'(x) \geq 0 \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[-1, 1] \Rightarrow f(-1) \leq f(x) \leq f(1),$ pentru orice $x \in [-1, 1]$	3p
	Cum $f(-1) = \frac{2-e}{2e}$ și $f(1) = \frac{2e+1}{2}$, obținem $\frac{2-e}{2e} \leq f(x) \leq \frac{2e+1}{2}, \text{ pentru orice } x \in [-1, 1]$	2p
2.a)	$\int_1^2 \frac{f(x)}{\sqrt{x}} dx = \int_1^2 (x+1) dx = \left(\frac{x^2}{2} + x \right) \Big _1^2 =$	3p
	$= (2+2) - \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{5}{2}$	2p
b)	$V = \pi \int_0^1 g^2(x) dx = \pi \int_0^1 x(x+1)^2 dx = \pi \int_0^1 (x^3 + 2x^2 + x) dx = \pi \left(\frac{x^4}{4} + \frac{2x^3}{3} + \frac{x^2}{2} \right) \Big _0^1 =$	3p
	$= \pi \left(\frac{1}{4} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \right) = \frac{17\pi}{12}$	2p
c)	$\int_1^e \frac{f(x)\sqrt{x} \ln x}{x+1} dx = \int_1^e x \ln x dx = \int_1^e \left(\frac{x^2}{2} \right)' \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x \Big _1^e - \int_1^e \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \int_1^e x dx =$	3p
	$= \frac{e^2}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^2}{2} \Big _1^e = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2 + 1}{4}, \text{ deci } a = 1$	2p