

Examenul național de bacalaureat 2021

Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă zece puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de trei ore.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

- 5p 1. Arătați că numărul $N = \log_2 6 - 2\log_2 3 + \log_2 24$ este natural.
- 5p 2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - x + 2$. Arătați că dreapta de ecuație $y = 2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte.
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\sqrt{x^2 - 5} = \sqrt{3x - 1}$.
- 5p 4. Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi A , știind că mulțimea A are exact 15 submulțimi cu două elemente.
- 5p 5. Se consideră triunghiul ABC și punctele M , N și P mijloacele segmentelor BC , BM , respectiv CM . Arătați că $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$.
- 5p 6. Determinați $x \in (0, \pi)$, știind că $\sin 2x + 2\sin^2 x = 0$.

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(a, b, c) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{pmatrix}$, unde a , b și c sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că $\det(A(0, 1, 2)) = 2$.
- 5p b) Demonstrați că $\det(A(a, b, c)) = (b - a)(c - a)(c - b)$, pentru orice numere reale a , b și c .
- 5p c) Demonstrați că, dacă m , n și p sunt numere naturale, cu $m < n < p$, astfel încât determinantul matricei $A(m, n, p)$ este număr prim, atunci numerele m , n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice.
2. În mulțimea $\mathbb{Z}_3[X]$, se consideră polinomul $f = X^4 + aX^3 + \hat{2}X + b$, unde $a, b \in \mathbb{Z}_3$.
- 5p a) Pentru $a = \hat{1}$ și $b = \hat{2}$, arătați că $f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$.
- 5p b) Determinați perechile (a, b) , cu $a, b \in \mathbb{Z}_3$, pentru care polinomul f este divizibil cu $X + \hat{2}$.
- 5p c) Arătați că, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$, există $x, y \in \mathbb{Z}_3$, cu $x \neq y$, astfel încât $f(x) = f(y)$.

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{xe^x}{e^x + 2}$.
- 5p a) Arătați că $f'(x) = \frac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}$, $x \in \mathbb{R}$.
- 5p b) Arătați că dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p c) Demonstrați că funcția f are un unic punct de extrem.

2. Se consideră funcția $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{2(x+3)}{\sqrt{x^2+4x+5}}$.

5p a) Arătați că $\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2+4x+5} dx = 7$.

5p b) Arătați că $\int_0^1 (f^2(x) - 4) dx = 4 \ln 2$.

5p c) Se consideră numerele reale a și b , cu $0 \leq a < b$. Pentru fiecare număr natural nenul n , se consideră numărul $I_n = \int_a^b f^n(x) dx$. Demonstrați că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$.

Examenul național de bacalaureat 2021
Proba E. c)
Matematică M_mate-info
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă zece puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la zece a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$N = \log_2 6 - \log_2 9 + \log_2 24 = \log_2 \frac{6 \cdot 24}{9} =$ $= \log_2 16 = 4$, care este număr natural	3p 2p
2.	$f(x) = 2 \Leftrightarrow x^2 - x + 2 = 2 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$ Cum ecuația $x^2 - x = 0$ are două soluții reale și distincte, obținem că dreapta $y = 2$ intersectează graficul funcției f în două puncte distincte	2p 3p
3.	$x^2 - 5 = 3x - 1 \Rightarrow x^2 - 3x - 4 = 0$ $x = -1$, care nu convine, $x = 4$, care convine	2p 3p
4.	Mulțimea A are C_n^2 submulțimi cu 2 elemente, unde $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, este numărul de elemente ale lui A $C_n^2 = 15$, deci $\frac{n(n-1)}{2} = 15$, de unde obținem că mulțimea A are 6 elemente	2p 3p
5.	M mijlocul lui $BC \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$ M mijlocul lui $NP \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP})$, deci $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AP} = 3\overrightarrow{AM} = \frac{3}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$	2p 3p
6.	$2 \sin x \cos x + 2 \sin^2 x = 0 \Leftrightarrow 2 \sin x (\cos x + \sin x) = 0$ Cum $x \in (0, \pi)$, obținem $x = \frac{3\pi}{4}$	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(0,1,2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(0,1,2)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} =$ $= 0 + 0 + 4 - 2 - 0 - 0 = 2$	2p 3p
b)	$\det(A(a,b,c)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ bc & ac & ab \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & ac-bc & ab-bc \end{vmatrix} =$ $= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & b-a & c-a \\ bc & -c(b-a) & -b(c-a) \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$, pentru orice numere reale a, b și c	2p 3p
c)	$\det(A(m,n,p)) = (n-m)(p-m)(p-n)$ și, cum m, n și p sunt numere naturale, cu $m < n < p$, obținem $p-m > p-n > 0$ și $p-m > n-m > 0$ Cum $\det(A(m,n,p))$ este număr prim, obținem $p-n = n-m = 1$, deci numerele m, n și p sunt termeni consecutivi ai unei progresii aritmetice	3p 2p

Probă scrisă la matematică M_mate-info

Model

Barem de evaluare și de notare

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică

Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

2.a)	$f = X^4 + X^3 + 2X + 2$, deci $f(\hat{0}) = \hat{2}$ și $f(\hat{2}) = \hat{0}$	3p
	$f(\hat{0}) + f(\hat{2}) = \hat{2} + \hat{0} = \hat{2}$	2p
b)	f este divizibil cu $X + \hat{2} \Leftrightarrow f(\hat{1}) = \hat{0}$, deci $a + b = \hat{0}$	3p
	Cum $a, b \in \mathbb{Z}_3$, perechile sunt $(\hat{0}, \hat{0})$, $(\hat{1}, \hat{2})$ și $(\hat{2}, \hat{1})$	2p
c)	$f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{2}$, pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$	3p
	Dacă $f(\hat{0})$, $f(\hat{1})$ și $f(\hat{2})$ ar fi distincte două câte două, atunci $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = \hat{0} + \hat{1} + \hat{2} = \hat{0}$, ceea ce este fals, deci pentru orice $a, b \in \mathbb{Z}_3$, există $x, y \in \mathbb{Z}_3$, cu $x \neq y$, astfel încât $f(x) = f(y)$	2p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

1.a)	$f'(x) = \frac{(e^x + xe^x)(e^x + 2) - xe^{2x}}{(e^x + 2)^2} =$	3p
	$= \frac{e^{2x} + 2e^x + 2xe^x}{(e^x + 2)^2} = \frac{e^x(e^x + 2x + 2)}{(e^x + 2)^2}, x \in \mathbb{R}$	2p
b)	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{e^x + 2} = 1$	2p
	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{xe^x - x(e^x + 2)}{e^x + 2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{e^x + 2} = 0$, deci dreapta de ecuație $y = x$ este asimptotă oblică spre $+\infty$ la graficul funcției f	3p
c)	$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = e^x + 2x + 2$ este strict crescătoare și, cum g este continuă, $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\infty$	3p
	și $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$, există un unic număr real c , astfel încât $g(c) = 0$ $f'(x) < 0$, pentru orice $x \in (-\infty, c) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, c)$ și $f'(x) > 0$, pentru orice $x \in (c, +\infty) \Rightarrow f$ este strict crescătoare pe $(c, +\infty)$ și, cum f este continuă, obținem că f are un unic punct de extrem	2p
2.a)	$\int_0^1 f(x) \sqrt{x^2 + 4x + 5} dx = \int_0^1 2(x+3) dx = (x^2 + 6x) \Big _0^1 =$	3p
	$= 1 + 6 - 0 - 0 = 7$	2p
b)	$\int_0^1 (f^2(x) - 4) dx = \int_0^1 \frac{4(x+3)^2 - 4(x^2 + 4x + 5)}{x^2 + 4x + 5} dx = 4 \int_0^1 \frac{2x+4}{x^2 + 4x + 5} dx =$	2p
	$= 4 \int_0^1 \frac{(x^2 + 4x + 5)'}{x^2 + 4x + 5} dx = 4 \ln(x^2 + 4x + 5) \Big _0^1 = 4 \ln 2$	3p
c)	Cum $f^2(x) - 4 = \frac{4(2x+4)}{x^2 + 4x + 5} \geq 0$ și $f(x) \geq 0$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$, obținem $f(x) \geq 2$, deci $f^n(x) \geq 2^n$, pentru orice $x \in [0, +\infty)$ și orice număr natural nenul n	2p
	Cum $0 \leq a < b$, $I_n = \int_a^b f^n(x) dx \geq 2^n(b-a)$, pentru orice număr natural nenul n și, cum $\lim_{n \rightarrow +\infty} 2^n = +\infty$, obținem că $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = +\infty$	3p