

**Examenul de bacalaureat național 2020**

**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**Model**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

- 5p 1. Arătați că  $(0,3 \cdot 10 - 1)(0,3 \cdot 10 + 1) = 8$ .
- 5p 2. Se consideră  $x_1$  și  $x_2$  soluțiile ecuației  $x^2 - 6x + m = 0$ , unde  $m$  este număr real. Determinați numărul real  $m$  pentru care  $x_1 x_2 (x_1 + x_2) = 12$ .
- 5p 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2\sqrt{5-x} = \sqrt{x+10}$ .
- 5p 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea numerelor naturale de două cifre, acesta să aibă cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților.
- 5p 5. Determinați numărul real  $a$  pentru care vectorii  $\vec{u} = a\vec{i} + (a-1)\vec{j}$  și  $\vec{v} = 3\vec{i} + 4\vec{j}$  sunt coliniari.
- 5p 6. Arătați că, dacă  $x$  este număr real pentru care  $\sin x = \cos x$ , atunci  $\cos 2x = 0$ .

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea  $A(a,b) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix}$ , unde  $a$  și  $b$  sunt numere reale.
- 5p a) Arătați că  $\det(A(1,1)) = 3$ .
- 5p b) Demonstrați că  $A(a,b) \cdot A(b,a) = A(-ab, a^2 + b^2)$ , pentru orice numere reale  $a$  și  $b$ .
- 5p c) Determinați perechile de numere întregi  $m$  și  $n$  pentru care  $\det(A(m,n)) = 1$ .
2. Se consideră polinomul  $f = X^3 - 15X^2 + mX - 80$ , unde  $m$  este număr real.
- 5p a) Pentru  $m = 95$ , arătați că  $f(1) = 1$ .
- 5p b) Determinați numărul real  $m$  pentru care  $x_1(x_1 - x_2) + x_2(x_2 - x_3) + x_3(x_3 - x_1) = 0$ , unde  $x_1, x_2$  și  $x_3$  sunt rădăcinile polinomului  $f$ .
- 5p c) Determinați rădăcinile polinomului  $f$ , știind că acestea sunt numere reale în progresie aritmetică.

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f(x) = e^x - x - 10$ .
- 5p a) Arătați că  $f'(0) = 0$ .
- 5p b) Demonstrați că oricare două tangente la graficul funcției  $f$  sunt concurente.
- 5p c) Demonstrați că  $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$ , pentru orice număr real  $x$ .
2. Se consideră funcția  $f: (0, +\infty) \rightarrow (0, +\infty)$ ,  $f(x) = x + \frac{9}{x}$ .
- 5p a) Arătați că  $\int_1^3 \left( f(x) - \frac{9}{x} \right) dx = 4$ .
- 5p b) Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției  $g: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x) = \frac{2}{f(x)}$ , axa  $Ox$  și dreptele de ecuații  $x=1$  și  $x=9$  are aria egală cu  $2 \ln 3$ .
- 5p c) Determinați numărul real  $a$ , știind că  $\int_1^{\sqrt{3}} \left( f(x) - \frac{9}{x} \right) \arctg x dx = \frac{5\pi}{12} - \frac{3 + \sqrt{3} - a}{2}$ .

**Examenul de bacalaureat național 2020**  
**Proba E. c)**

**Matematică  $M_{\text{șt-nat}}$**

**BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE**

**Model**

*Filiera teoretică, profilul real, specializarea științe ale naturii*

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

**SUBIECTUL I**

**(30 de puncte)**

1.	$(0,3 \cdot 10 - 1)(0,3 \cdot 10 + 1) = (3 - 1)(3 + 1) =$ $= 2 \cdot 4 = 8$	3p 2p
2.	$x_1 + x_2 = 6, x_1 x_2 = m$ $6m = 12$ , deci $m = 2$	2p 3p
3.	$4(5 - x) = x + 10 \Rightarrow 20 - 4x = x + 10 \Rightarrow 5x = 10$ $x = 2$ , care convine	3p 2p
4.	Mulțimea numerelor naturale de două cifre are 90 de elemente, deci sunt 90 de cazuri posibile În mulțimea numerelor naturale de două cifre sunt 7 numere care au cifra zecilor cu 3 mai mare decât cifra unităților, deci sunt 7 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{90}$	2p 2p 1p
5.	$\frac{a}{3} = \frac{a-1}{4} \Leftrightarrow 4a = 3a - 3$ $a = -3$	3p 2p
6.	$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x =$ $= (\cos x - \sin x)(\cos x + \sin x) = 0 \cdot (\cos x + \sin x) = 0$	2p 3p

**SUBIECTUL al II-lea**

**(30 de puncte)**

1.a)	$A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1)) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - (-1) \cdot 2 =$ $= 1 + 2 = 3$	3p 2p
b)	$A(a,b) \cdot A(b,a) = \begin{pmatrix} a & 2b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & 2a \\ -a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ab - 2ab & 2a^2 + 2b^2 \\ -b^2 - a^2 & -2ab + ab \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} -ab & 2(a^2 + b^2) \\ -(a^2 + b^2) & -ab \end{pmatrix} = A(-ab, a^2 + b^2)$ , pentru orice numere reale $a$ și $b$	3p 2p
c)	$\det(A(m,n)) = \begin{vmatrix} m & 2n \\ -n & m \end{vmatrix} = m^2 + 2n^2$ Cum $m$ și $n$ sunt numere întregi, din $m^2 + 2n^2 = 1$ obținem $m = -1, n = 0$ sau $m = 1, n = 0$	2p 3p
2.a)	$f = X^3 - 15X^2 + 95X - 80 \Rightarrow f(1) = 1^3 - 15 \cdot 1^2 + 95 \cdot 1 - 80 =$ $= 1 - 15 + 95 - 80 = 1$	2p 3p
b)	$x_1 + x_2 + x_3 = 15$ și $x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3 = m$ $(x_1 + x_2 + x_3)^2 - 3(x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) = 0 \Leftrightarrow 225 - 3m = 0$ , deci $m = 75$	2p 3p

<b>c)</b>	$2x_2 = x_1 + x_3$ și $x_1 + x_2 + x_3 = 15 \Rightarrow x_2 = 5$	<b>2p</b>
	$x_1 x_2 x_3 = 80 \Rightarrow x_1 x_3 = 16$ și, cum $x_1 + x_3 = 10$ , polinomul $f$ are rădăcinile 2, 5 și 8	<b>3p</b>

**SUBIECTUL al III-lea**

**(30 de puncte)**

<b>1.a)</b>	$f'(x) = e^x - 1, x \in \mathbb{R}$	<b>3p</b>
	$f'(0) = e^0 - 1 = 0$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$f''(x) = e^x > 0$ , pentru orice număr real $x \Rightarrow f'$ este strict crescătoare, deci $f'$ este injectivă	<b>2p</b>
	Pentru orice numere reale $x_1$ și $x_2$ , $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f'(x_1) \neq f'(x_2)$ , deci tangentele la graficul lui $f$ în punctele de coordonate $(x_1, f(x_1))$ și $(x_2, f(x_2))$ au pante diferite, deci sunt concurente	<b>3p</b>
<b>c)</b>	$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$	<b>1p</b>
	$f'(x) \leq 0$ , pentru orice $x \in (-\infty, 0] \Rightarrow f$ este descrescătoare pe $(-\infty, 0]$ , $f'(x) \geq 0$ , pentru orice $x \in [0, +\infty) \Rightarrow f$ este crescătoare pe $[0, +\infty)$ și, cum $f(0) = -9$ , obținem $f(x) \geq -9$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
	$f(x^3) \geq -9 \Rightarrow e^{x^3} \geq x^3 + 1$ , deci $e^{x^3} \geq (x+1)(x^2 - x + 1)$ , pentru orice număr real $x$	<b>2p</b>
<b>2.a)</b>	$\int_1^3 \left( f(x) - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 \left( x + \frac{9}{x} - \frac{9}{x} \right) dx = \int_1^3 x dx = \frac{x^2}{2} \Big _1^3 =$	<b>3p</b>
	$= \frac{9}{2} - \frac{1}{2} = 4$	<b>2p</b>
<b>b)</b>	$g(x) = \frac{2x}{x^2 + 9} \Rightarrow \mathcal{A} = \int_1^9  g(x)  dx = \int_1^9 \frac{2x}{x^2 + 9} dx = \ln(x^2 + 9) \Big _1^9 =$	<b>3p</b>
	$= \ln 90 - \ln 10 = \ln 9 = 2 \ln 3$	<b>2p</b>
<b>c)</b>	$\int_1^{\sqrt{3}} x \operatorname{arctg} x dx = \int_1^{\sqrt{3}} \left( \frac{x^2 + 1}{2} \right)' \operatorname{arctg} x dx = \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x \Big _1^{\sqrt{3}} - \int_1^{\sqrt{3}} \frac{x^2 + 1}{2(x^2 + 1)} dx = \left( \frac{x^2 + 1}{2} \operatorname{arctg} x - \frac{x}{2} \right) \Big _1^{\sqrt{3}} =$	<b>3p</b>
	$= \frac{5\pi}{12} - \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$ , de unde obținem $a = 4$	<b>2p</b>