Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

5p **1.** Suma primilor trei termeni ai progresiei aritmetice $(a_n)_{n\ge1}$ este egală cu 30. Determinați a_2.

5p **2.** Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-6x+9$. Arătați că $(f\circ f)(3)=9$.

5p **3.** Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $\log_2(x-6)=6-\log_2(x+6)$.

5p **4.** Determinați câte numere naturale de două cifre distincte se pot forma cu elementele mulțimii $\{0,1,2,3,4,5\}$.

5p **5.** Se consideră triunghiul ABC, punctul D mijlocul laturii AC și punctul E mijlocul segmentului BD. Arătați că $\overrightarrow{CE}=\frac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=2\sqrt{3}$, $A=\frac{\pi}{4}$ și $B=\frac{5\pi}{12}$. Determinați raza cercului circumscris triunghiului ABC.

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix} a & 2 & 1\\ a & 4 & 1\\ 1 & -1 & a\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases} ax+2y+z=4\\ ax+4y+z=6\\ x-y+az=1\end{cases}$, unde a este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(A(1))=0$.

5p **b)** Determinați numerele reale a pentru care matricea $A(a)$ are rangul 2.

5p **c)** Determinați numărul real a, știind că sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0) și $x_0^2+y_0^2+z_0^2=3$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x*y=xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{3}{4}$. Legea de compoziție este asociativă și are elementul neutru $e=\frac{3}{2}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale nenule x pentru care $\frac{1}{x}*x*\frac{1}{x}=x*\frac{1}{x}*x$.

5p **c)** Arătați că **nu** există numere întregi x și y, astfel încât x să fie simetricul lui y în raport cu legea de compoziție „$*$”.

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2-8x+8\ln x+12-8\ln 2$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$.

5p **b)** Determinați ecuația dreptei care trece prin punctul $A(3,3)$ și este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

5p **c)** Se consideră numerele reale a, b și c astfel încât punctul $M(a,b)$ este situat pe graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(x)=x^2-8\ln 2+8\ln x$ și punctul $N(a,c)$ este situat pe graficul funcției $h:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $h(x)=8x-12$. Demonstrați că $b\geq c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^1 (x^2+4) f(x)\,dx=-\dfrac{11}{3}$.

5p **b)** Demonstrați că orice primitivă a funcției f este concavă pe $(-\infty,0]$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural n, se consideră $I_n=\int_1^2 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n=-\infty$.

Examenul de bacalaureat național 2020
Proba E. c)

Matematică *M_mate-info*

BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocațională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$a_2=\dfrac{a_1+a_3}{2}\Rightarrow 2a_2=a_1+a_3$	**3p**
	$a_1+a_2+a_3=3a_2 \Leftrightarrow 30=3a_2 \Leftrightarrow a_2=10$	**2p**
2.	$f(3)=0$	**2p**
	$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(0)=9$	**3p**
3.	$(x-6)(x+6)=2^6 \Rightarrow x^2-36=64 \Rightarrow x^2-100=0$	**3p**
	$x=-10$, care nu convine; $x=10$, care convine	**2p**
4.	Cifra zecilor, fiind nenulă, se poate alege în 5 moduri	**2p**
	Pentru fiecare alegere a cifrei zecilor, cifra unităților se poate alege în câte 5 moduri, deci se pot forma $5\cdot 5=25$ de numere	**3p**
5.	$\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CD}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}$	**3p**
	Cum $\overrightarrow{CD}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CA}$, obținem $\overrightarrow{CE}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{CB}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{CA}-\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$	**2p**
6.	$C=\pi-(A+B)=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow \sin C=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$	**3p**
	$\dfrac{AB}{\sin C}=2R\Rightarrow R=2$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(1)=\begin{pmatrix}1&2&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\Rightarrow \det(A(1))=\begin{vmatrix}1&2&1\\1&4&1\\1&-1&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=4+(-1)+2-4-(-1)-2=0$	**3p**
b)	$\det(A(a))=2(a^2-1)$, pentru orice număr real a	**2p**
	$\begin{vmatrix}2&1\\4&1\end{vmatrix}\neq 0$, deci matricea $A(a)$ are rangul $2 \Leftrightarrow \det(A(a))=0$, de unde obținem $a=-1$ sau $a=1$	**3p**
c)	Sistemul are soluție unică (x_0,y_0,z_0), deci $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$ și soluția sistemului este $\left(\dfrac{2}{a+1},1,\dfrac{2}{a+1}\right)$	**3p**
	$\left(\dfrac{2}{a+1}\right)^2+1+\left(\dfrac{2}{a+1}\right)^2=3$ și, cum $a\in\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, obținem $a=-3$	**2p**

2.a)	$x*y=xy-\frac{x}{2}-\frac{y}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=$	**2p**
	$=x\left(y-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x}-x\right)=0$	**1p**
	$\frac{1}{x}-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=2$	**1p**
	$x-\frac{1}{2}=0\Rightarrow x=\frac{1}{2}$	**1p**
	$\frac{1}{x}-x=0\Rightarrow x=-1$ sau $x=1$	**2p**
c)	Presupunem că există x și y numere întregi, astfel încât x să fie simetricul lui y, deci $x*y=e$, de unde obținem $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$	**2p**
	$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{1}{2}\right)=1\Rightarrow(2x-1)(2y-1)=4$, ceea ce nu convine, deoarece x și y sunt numere întregi și 4 este număr par	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=2x-8+\frac{8}{x}=$	**3p**
	$=\frac{2x^2-8x+8}{x}=\frac{2(x-2)^2}{x}$, $x\in(0,+\infty)$	**2p**
b)	Dreapta este paralelă cu tangenta la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, deci are panta egală cu $f'(2)$	**2p**
	Cum $f'(2)=0$, ecuația dreptei este $y=3$	**3p**
c)	$f'(x)\geq 0$, pentru orice $x\in(0,+\infty)\Rightarrow f$ este crescătoare pe $(0,+\infty)$ și, cum $f(2)=0$, obținem $f(a)\geq 0$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$	**2p**
	$f(a)\geq 0\Rightarrow g(a)\geq h(a)\Rightarrow b\geq c$, pentru orice $a\in[2,+\infty)$	**3p**
2.a)	$\int_0^1\left(x^2+4\right)f(x)dx=\int_0^1\left(x^2-4\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}-4x\right)\right\|_0^1=$	**3p**
	$=\frac{1}{3}-4=-\frac{11}{3}$	**2p**
b)	$F'(x)=f(x)=\frac{x^2-4}{x^2+4}$, $F''(x)=f'(x)=\frac{16x}{\left(x^2+4\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$, unde F este o primitivă a lui f	**3p**
	$F''(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,0]$, deci funcția F este concavă pe $(-\infty,0]$	**2p**
c)	$x\in[1,2]\Rightarrow x^n\left(x^2-4\right)\leq 0$ și $\frac{1}{x^2+4}\geq\frac{1}{8}$, deci $x^n f(x)\leq\frac{1}{8}x^n\left(x^2-4\right)$	**2p**
	$I_n\leq\int_1^2\frac{1}{8}x^n\left(x^2-4\right)dx=\frac{1}{8}\left.\left(\frac{x^{n+3}}{n+3}-\frac{4x^{n+1}}{n+1}\right)\right\|_1^2=\frac{1}{8}\left(-\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)}-\frac{1}{n+3}+\frac{4}{n+1}\right)$	**2p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{2^{n+4}}{(n+3)(n+1)}=+\infty$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}I_n=-\infty$	**1p**