

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)

Matematică $M_{tehnologic}$

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

- 5p** 1. Arătați că numărul $N = (4 + 3i)^2 + (3 - 4i)^2$ este natural, unde $i^2 = -1$.
- 5p** 2. Determinați numerele reale a , știind că punctul $A(a, a)$ aparține graficului funcției $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2 - x^2$.
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $5^x + 5^{x+1} = 30$.
- 5p** 4. Calculați probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $M = \{\sqrt{1}, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \dots, \sqrt{49}\}$, acesta să fie număr natural.
- 5p** 5. În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(2,5)$, $B(3,5)$ și $C(2,1)$. Determinați lungimea medianei din B a triunghiului ABC .
- 5p** 6. Demonstrați că $(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = 2$, pentru orice număr real x .

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră matricea $A(x, y) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}$, unde x și y sunt numere reale.
- 5p** a) Arătați că $\det(A(1,1)) = 2$.
- 5p** b) Determinați numărul natural n pentru care $A(n-1,0) + A(n+1,0) = A(2018,0)$.
- 5p** c) Determinați numărul real a , știind că există un număr real x pentru care $A(x,1) \cdot A(x,1) = A(a,-2)$.
2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 7X^2 + mX - 8$, unde m este număr real.
- 5p** a) Arătați că $f(-1) + f(1) = -30$, pentru orice număr real m .
- 5p** b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 3X + 1$, știind că f se divide cu $X - 2$.
- 5p** c) Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete.

(30 de puncte)

1. Se consideră funcția $f: (-2, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x + 2}$.
- 5p** a) Arătați că $f'(x) = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x \in (-2, +\infty)$.
- 5p** b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f .
- 5p** c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2, +\infty)$.
2. Se consideră funcția $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 + \frac{1}{x}$.
- 5p** a) Determinați primitiva F a funcției f pentru care $F(1) = 0$.
- 5p** b) Arătați că volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = f(x)$ este egal cu $\frac{97\pi}{10}$.
- 5p** c) Determinați numărul $m \in (1, +\infty)$, știind că $\int_1^m (f(x) - x^2) \ln x \, dx = \frac{1}{2}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_tehnologic*
BAREM DE EVALUARE ȘI DE NOTARE

Model

Filiera tehnologică: profilul servicii, toate calificările profesionale; profilul resurse, toate calificările profesionale; profilul tehnic, toate calificările profesionale

- Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.
- Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.
- Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.

SUBIECTUL I

(30 de puncte)

1.	$N = 16 + 24i + 9i^2 + 9 - 24i + 16i^2 =$ $= 16 - 9 + 9 - 16 = 0$, care este număr natural	2p 3p
2.	$f(a) = a \Leftrightarrow 2 - a^2 = a \Leftrightarrow a^2 + a - 2 = 0$ $a = -2$ sau $a = 1$	3p 2p
3.	$5^x(1+5) = 30 \Leftrightarrow 5^x = 5$ $x = 1$	3p 2p
4.	Mulțimea M are 49 de elemente, deci sunt 49 de cazuri posibile În mulțimea M sunt 7 numere naturale, deci sunt 7 cazuri favorabile $p = \frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}} = \frac{7}{49} = \frac{1}{7}$	1p 2p 2p
5.	Mijlocul segmentului AC este punctul $M(2,3)$ $BM = \sqrt{(3-2)^2 + (5-3)^2} = \sqrt{5}$	2p 3p
6.	$(\sin x + \cos x)^2 + (\sin x - \cos x)^2 = \sin^2 x + 2\sin x \cos x + \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin x \cos x + \cos^2 x =$ $= 2(\sin^2 x + \cos^2 x) = 2 \cdot 1 = 2$, pentru orice număr real x	2p 3p

SUBIECTUL al II-lea

(30 de puncte)

1.a)	$A(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A(1,1)) = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot (-1) =$ $= 1 + 1 = 2$	3p 2p
b)	$\begin{pmatrix} n-1 & 0 \\ 0 & n-1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} n+1 & 0 \\ 0 & n+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2n & 0 \\ 0 & 2n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2018 & 0 \\ 0 & 2018 \end{pmatrix}$ $n = 1009$	3p 2p
c)	$\begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x^2 - 1 & -2x \\ 2x & x^2 - 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & a \end{pmatrix}$ $x = -1$, de unde obținem $a = 0$	3p 2p
2.a)	$f(-1) = (-1)^3 - 7 \cdot (-1)^2 + m \cdot (-1) - 8 = -m - 16$ $f(1) = 1^3 - 7 \cdot 1^2 + m \cdot 1 - 8 = m - 14 \Rightarrow f(-1) + f(1) = -m - 16 + m - 14 = -30$, pentru orice număr real m	2p 3p
b)	$f(2) = 0 \Rightarrow m = 14$, deci $f = X^3 - 7X^2 + 14X - 8$ Câtul este $X - 4$ și restul este $X - 4$	2p 3p
c)	$x_1 x_3 = x_2^2 \Rightarrow x_1 x_2 x_3 = x_2^3$ și, cum $x_1 x_2 x_3 = 8$, obținem $x_2 = 2$ Polinomul f are rădăcinile 1, 2 și 4, deci $m = 14$	2p 3p

SUBIECTUL al III-lea

(30 de puncte)

<p>1.a)</p>	$f'(x) = \frac{(2x+2)(x+2) - (x^2 + 2x + 1) \cdot 1}{(x+2)^2} =$ $= \frac{x^2 + 4x + 3}{(x+2)^2} = \frac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}, x \in (-2, +\infty)$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>b)</p>	$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x(x+2)} = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+2} = 0, \text{ deci dreapta de ecuație } y = x \text{ este asimptotă oblică spre } +\infty \text{ la graficul funcției } f$	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>c)</p>	$f''(x) = \frac{2}{(x+2)^3}, x \in (-2, +\infty)$ $f''(x) > 0, \text{ pentru orice } x \in (-2, +\infty), \text{ deci funcția } f \text{ este convexă pe } (-2, +\infty)$	<p>2p</p> <p>3p</p>
<p>2.a)</p>	$F: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}, F(x) = \frac{x^3}{3} + \ln x + c, \text{ unde } c \in \mathbb{R}$ $\text{Cum } F(1) = \frac{1}{3} + c, \text{ obținem } F(1) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{1}{3}, \text{ deci } F(x) = \frac{x^3}{3} + \ln x - \frac{1}{3}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>b)</p>	$g(x) = x^2 + \frac{1}{x} \Rightarrow V = \pi \int_1^2 g^2(x) dx = \pi \int_1^2 \left(x^4 + 2x + \frac{1}{x^2} \right) dx = \pi \cdot \left(\frac{x^5}{5} + x^2 - \frac{1}{x} \right) \Big _1^2 =$ $= \pi \left(\frac{32}{5} + 4 - \frac{1}{2} - \frac{1}{5} - 1 + 1 \right) = \frac{97\pi}{10}$	<p>3p</p> <p>2p</p>
<p>c)</p>	$\int_1^m (f(x) - x^2) \ln x dx = \int_1^m \frac{1}{x} \ln x dx = \frac{1}{2} \ln^2 x \Big _1^m = \frac{1}{2} \ln^2 m$ $\frac{1}{2} \ln^2 m = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln m = -1 \text{ sau } \ln m = 1, \text{ deci } m = \frac{1}{e}, \text{ care nu convine sau } m = e, \text{ care convine}$	<p>3p</p> <p>2p</p>