Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p	**1.** Arătați că numărul $a=\left(\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}\right)^2$ este întreg, unde $i^2=-1$.
5p	**2.** Determinați cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației $x^2-7x+m=0$ sunt numere reale.
5p	**3.** Rezolvați în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=117$.
5p	**4.** Determinați numărul de elemente ale unei mulțimi, știind că aceasta are exact 36 de submulțimi cu două elemente.
5p	**5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $A(-1,1)$, $B(3,-3)$ și $C(3,0)$. Determinaţi ecuaţia medianei din C a triunghiului ABC.
5p	**6.** Determinați $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ pentru care $\cos x\sin(\pi-x)-\sin x\cos(\pi+x)=1$.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră matricea $A(a)=\begin{pmatrix}2 & a & 1\\ 3 & 2a-1 & 1\\ a-3 & a & 1\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}2x+ay+z=1\\ 3x+(2a-1)y+z=1\\ (a-3)x+ay+z=2a-1\end{cases}$, unde a este număr real.
5p	**a)** Arătați că $\det(A(0))=-5$.
5p	**b)** Determinați numerele reale a pentru care $\det(A(a))=0$.
5p	**c)** Pentru $a=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $x_0^2=y_0z_0$.
	2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x*y=5xy-5(x+y)+6$.
5p	**a)** Demonstrați că $x*y=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y.
5p	**b)** Determinați valorile reale ale lui x pentru care $x*x*x<26$.
5p	**c)** Determinați numărul natural nenul n pentru care $\frac{1}{n^2}*\frac{1}{(n+1)^2}*\frac{1}{(n+2)^2}=-19$.

SUBIECTUL al III-lea –- Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

	1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{2(x-1)}{x}$.
5p	**a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.
5p	**b)** Determinați abscisa punctului situat pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x$.
5p	**c)** Demonstrați că $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+1$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^3 f(x)\,dx=12$.

5p **b)** Determinați aria suprafeței plane delimitate de graficul funcției $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $g(x)=\frac{x}{f(x)}$, axa Ox și dreptele de ecuații $x=0$ și $x=1$.

5p **c)** Demonstrați că există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$.

Examenul de bacalaureat național 2019

Proba E. c)
Matematică *M_şt-nat*

BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea ştiinţe ale naturii

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I **(30 de puncte)**

1.	$\frac{1}{1-i}-\frac{1}{1+i}=\frac{(1+i)-(1-i)}{1^2-i^2}=\frac{2i}{2}=i$	**3p**
	$a=i^2=-1$, care este număr întreg	**2p**
2.	$\Delta=49-4m$	**2p**
	$\Delta\ge 0\Leftrightarrow m\in\left(-\infty,\frac{49}{4}\right]$, deci cel mai mare număr natural m pentru care soluțiile ecuației sunt numere reale este 12	**3p**
3.	$3^x\left(1+3+3^2\right)=117\Leftrightarrow 3^x=9$	**3p**
	$x=2$	**2p**
4.	$C_n^2=36$, unde n este numărul de elemente ale mulțimii	**3p**
	$\frac{n(n-1)}{2}=36$, deci $n=9$	**2p**
5.	Mijlocul segmentului AB este punctul $M(1,-1)$	**2p**
	Ecuația medianei din C este $y+1=\frac{1}{2}(x-1)$, deci $y=\frac{1}{2}x-\frac{3}{2}$	**3p**
6.	$\cos x\sin x+\sin x\cos x=1\Leftrightarrow \sin 2x=1$	**3p**
	Cum $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$, obținem $x=\frac{\pi}{4}$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$A(0)=\begin{pmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{pmatrix}\Rightarrow\det(A(0))=\begin{vmatrix}2&0&1\\3&-1&1\\-3&0&1\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=-2+0+0-3-0-0=-5$	**3p**
b)	$\det(A(a))=\begin{vmatrix}2&a&1\\3&2a-1&1\\a-3&a&1\end{vmatrix}=-a^2+6a-5$, pentru orice număr real a	**3p**
	$a=1$ sau $a=5$	**2p**
c)	Pentru $a=1$, sistemul este $\begin{cases}2x+y+z=1\\3x+y+z=1\\-2x+y+z=1\end{cases}$ și, scăzând primele două ecuații, obținem $x_0=0$, deci $y_0+z_0=1$	**3p**
	$x_0^2=y_0z_0\Rightarrow y_0z_0=0$, deci soluțiile sunt $(0,1,0)$ sau $(0,0,1)$, care convin	**2p**

2.a)	$x*y=5xy-5x-5y+5+1=$ $=5x(y-1)-5(y-1)+1=5(x-1)(y-1)+1$, pentru orice numere reale x și y	**3p** **2p**
b)	$x*x=5(x-1)^2+1$, $x*x*x=25(x-1)^3+1$ $(x-1)^3<1 \Leftrightarrow x\in(-\infty,2)$	**2p** **3p**
c)	$25\left(\frac{1}{n}-1\right)\left(\frac{1}{n}+1\right)\left(\frac{1}{n+1}-1\right)\left(\frac{1}{n+1}+1\right)\left(\frac{1}{n+2}-1\right)\left(\frac{1}{n+2}+1\right)+1=-19 \Leftrightarrow \frac{(1-n)(n+3)}{n(n+2)}=-\frac{4}{5}$ Cum n este număr natural nenul, obținem $n=3$	**3p** **2p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x-2(x-1)}{x^2}=$ $=\frac{x-2x+2x-2}{x^2}=\frac{x-2}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$	**3p** **2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este perpendiculară pe dreapta de ecuație $y=x \Leftrightarrow f'(a)=-1$ $\frac{a-2}{a^2}=-1 \Leftrightarrow a^2+a-2=0 \Leftrightarrow a=-2$, care nu convine sau $a=1$, care convine	**3p** **2p**
c)	$f'(x)<0$, pentru orice $x\in(0,2) \Rightarrow f$ este strict descrescătoare pe $(0,2)$ $0<1<\frac{\pi}{2}<2 \Rightarrow f\left(\frac{\pi}{2}\right)<f(1)$ și, cum $f(1)=0$, obținem $f\left(\frac{\pi}{2}\right)<0$	**2p** **3p**
2.a)	$\int_0^3 f(x)dx=\int_0^3\left(x^2+1\right)dx=\left.\left(\frac{x^3}{3}+x\right)\right\|_0^3=$ $=\frac{27}{3}+3-0=12$	**3p** **2p**
b)	$g(x)=\frac{x}{x^2+1} \Rightarrow \mathcal{A}=\int_0^1\|g(x)\|dx=\int_0^1\frac{x}{x^2+1}dx=\left.\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)\right\|_0^1=$ $=\frac{1}{2}\ln 2$	**3p** **2p**
c)	Funcția $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $h(x)=\int_0^x e^{f(t)}dt-x$ este derivabilă și $h'(x)=e^{x^2+1}-1$ $h'(x)>0$ pentru orice număr real x, deci h este strict crescătoare pe $\mathbb{R} \Rightarrow h$ este injectivă și, cum $h(0)=0$, există un unic număr real x pentru care $\int_0^x e^{f(t)}dt=x$	**2p** **3p**