Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.**
- **Timpul de lucru efectiv este de 3 ore.**

SUBIECTUL I – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

5p **1.** Determinați elementele mulțimii $M=\left\{x\in\mathbb{Z}\,\middle|\,\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\right\}$.

5p **2.** Se consideră x_1 și x_2 soluțiile ecuației $x^2-mx-1=0$, unde m este număr real. Determinați numărul real m, știind că $\frac{x_1^2-1}{x_1}+\frac{x_2^2-1}{x_2}=2$.

5p **3.** Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $\sqrt{2-x}-x=0$.

5p **4.** Calculaţi probabilitatea ca, alegând un număr din mulțimea $A=\left\{\log_2 n\,\middle|\,n\in\mathbb{N}^*,\ n\le 20\right\}$, acesta să fie număr natural.

5p **5.** În reperul cartezian xOy se consideră punctele $M(0,2)$ și $P(1,1)$. Determinați ecuația mediatoarei segmentului MP.

5p **6.** Se consideră triunghiul ABC cu $AB=5\sqrt{2}$, $m(\sphericalangle A)=45°$ şi $m(\sphericalangle C)=30°$. Determinați lungimea laturii BC.

SUBIECTUL al II-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră matricea $M(m)=\begin{pmatrix}1 & 2 & 4\\ -1 & m & -1\\ m & 1 & 3\end{pmatrix}$ și sistemul de ecuații $\begin{cases}x+2y+4z=5\\ -x+my-z=-2\\ mx+y+3z=4\end{cases}$, unde m este număr real.

5p **a)** Arătați că $\det(M(0))=3$.

5p **b)** Determinați valorile reale ale lui m pentru care sistemul are soluție unică.

5p **c)** Pentru $m=1$, determinați soluțiile (x_0,y_0,z_0) ale sistemului pentru care $4y_0^2=(x_0+z_0)^2$.

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă, cu element neutru, $x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}(x+y)+\frac{9}{4}$.

5p **a)** Demonstrați că $x*y=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y.

5p **b)** Determinați numerele reale x pentru care $x*x*x=x$.

5p **c)** Demonstrați că **nu** există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural.

SUBIECTUL al III-lea – Scrieți, pe foaia de examen, rezolvările complete. (30 de puncte)

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\ln\left(x^2+x+1\right)$.

5p **a)** Arătați că $f'(x)=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

5p **b)** Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2$.

5p **c)** Demonstrați că pentru fiecare număr natural nenul n, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică.

2. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{e^x}$.

5p **a)** Arătați că $\int_0^2 e^x f(x)\,dx=2$.

5p **b)** Demonstrați că suprafața plană delimitată de graficul funcției f, axa Ox și dreptele de ecuații $x=-1$ și $x=1$ are aria egală cu $2-\frac{2}{e}$.

5p **c)** Pentru fiecare număr natural nenul n, se consideră $I_n=\int_0^1 x^n f(x)\,dx$. Demonstrați că $\lim_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$.

Examenul de bacalaureat național 2019
Proba E. c)
Matematică *M_mate-info*
BAREM DE EVALUARE ŞI DE NOTARE

Model

Filiera teoretică, profilul real, specializarea matematică-informatică
Filiera vocaţională, profilul militar, specializarea matematică-informatică

- **Pentru orice soluție corectă, chiar dacă este diferită de cea din barem, se acordă punctajul corespunzător.**
- **Nu se acordă fracțiuni de punct, dar se pot acorda punctaje intermediare pentru rezolvări parțiale, în limitele punctajului indicat în barem.**
- **Se acordă 10 puncte din oficiu. Nota finală se calculează prin împărțirea la 10 a punctajului total acordat pentru lucrare.**

SUBIECTUL I (30 de puncte)

1.	$\frac{3}{x+1}\in\mathbb{N}\Rightarrow x+1=1$ sau $x+1=3$	**3p**
	Elementele mulțimii M sunt 0 și 2	**2p**
2.	$x_1^2-1=mx_1$, $x_2^2-1=mx_2$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\frac{mx_1}{x_1}+\frac{mx_2}{x_2}=2$, deci $m=1$	**3p**
3.	$\sqrt{2-x}=x\Rightarrow 2-x=x^2\Rightarrow x^2+x-2=0$	**3p**
	$x=-2$, care nu convine sau $x=1$, care convine	**2p**
4.	În mulțimea A sunt 20 de numere, deci sunt 20 de cazuri posibile	**1p**
	Pentru $n\le 20$, obținem $\log_2 n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow n\in\{1,2,4,8,16\}$, deci sunt 5 cazuri favorabile	**2p**
	$p=\frac{\text{nr. cazuri favorabile}}{\text{nr. cazuri posibile}}=\frac{5}{20}=\frac{1}{4}$	**2p**
5.	$m_{MP}=-1$, deci panta mediatoarei segmentului MP este $m=1$	**2p**
	$Q\left(\frac{1}{2},\frac{3}{2}\right)$ este mijlocul lui MP, deci ecuația mediatoarei este $y-\frac{3}{2}=x-\frac{1}{2}\Leftrightarrow y=x+1$	**3p**
6.	$\frac{AB}{\sin C}=\frac{BC}{\sin A}\Leftrightarrow\frac{5\sqrt{2}}{\frac{1}{2}}=\frac{BC}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$	**3p**
	$BC=10$	**2p**

SUBIECTUL al II-lea (30 de puncte)

1.a)	$M(0)=\begin{pmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{pmatrix}\Rightarrow\det(M(0))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&0&-1\\0&1&3\end{vmatrix}=$	**2p**
	$=0+(-4)+0-0-(-6)-(-1)=3$	**3p**
b)	$\det(M(m))=\begin{vmatrix}1&2&4\\-1&m&-1\\m&1&3\end{vmatrix}=-4m^2+m+3$, pentru orice număr real m	**2p**
	$\det(M(m))=0\Leftrightarrow m=-\frac{3}{4}$ sau $m=1$, deci sistemul are soluție unică pentru $m\in\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{3}{4},1\right\}$	**3p**
c)	Pentru $m=1$, sistemul este compatibil nedeterminat și soluțiile sistemului sunt $(3-2\alpha,1-\alpha,\alpha)$, unde $\alpha\in\mathbb{C}$	**3p**
	$4(1-\alpha)^2=(3-\alpha)^2\Leftrightarrow\alpha=-1$ sau $\alpha=\frac{5}{3}$, deci soluțiile sunt $(5,2,-1)$ sau $\left(-\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{5}{3}\right)$	**2p**

2.a)	$x*y=\frac{1}{3}xy-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}y+\frac{3}{4}+\frac{6}{4}=$	**2p**
	$=\frac{1}{3}x\left(y-\frac{3}{2}\right)-\frac{1}{2}\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)\left(y-\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}$, pentru orice numere reale x și y	**3p**
b)	$x*x=\frac{1}{3}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{2}$, $x*x*x=\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}$	**2p**
	$\frac{1}{9}\left(x-\frac{3}{2}\right)^3+\frac{3}{2}=x\Leftrightarrow x=-\frac{3}{2}$ sau $x=\frac{3}{2}$ sau $x=\frac{9}{2}$	**3p**
c)	$x*\frac{9}{2}=\frac{9}{2}*x=x$, pentru orice număr real x, deci $e=\frac{9}{2}$ este elementul neutru al legii „$*$”	**2p**
	$n*n'=n'*n=\frac{9}{2}\Leftrightarrow 4nn'-6n-6n'=27$, unde n' este simetricul lui n și, cum pentru $n,n'\in\mathbb{N}$, numărul $4nn'-6n-6n'$ este par, obținem că nu există niciun număr natural n al cărui simetric în raport cu legea de compoziție „$*$” să fie număr natural	**3p**

SUBIECTUL al III-lea **(30 de puncte)**

1.a)	$f'(x)=1-\frac{2x+1}{x^2+x+1}=$	**3p**
	$=\frac{x^2-x}{x^2+x+1}=\frac{x(x-1)}{x^2+x+1}$, $x\in\mathbb{R}$	**2p**
b)	Tangenta la graficul funcției f în punctul $(a,f(a))$ este paralelă cu dreapta de ecuație $y=-\frac{1}{7}x+2\Leftrightarrow f'(a)=-\frac{1}{7}$	**2p**
	$\frac{a(a-1)}{a^2+a+1}=-\frac{1}{7}\Leftrightarrow 8a^2-6a+1=0\Leftrightarrow a=\frac{1}{4}$ sau $a=\frac{1}{2}$	**3p**
c)	f continuă pe $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $f(0)=0$, $f(1)=1-\ln 3\in(-1,0)$	**3p**
	f este strict descrescătoare pe $(0,1)$ și f este strict crescătoare pe $(1,+\infty)$, deci, pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ nu are nicio soluție în $[0,+\infty)$	**1p**
	f este strict crescătoare pe $(-\infty,0)\Rightarrow$ pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică în $(-\infty,0)$, deci pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, ecuația $f(x)+n=0$ are soluție unică	**1p**
2.a)	$\int_0^2 e^x f(x)\,dx=\int_0^2 e^x\cdot\frac{x}{e^x}\,dx=\int_0^2 x\,dx=\left.\frac{x^2}{2}\right\vert_0^2=$	**3p**
	$=2-0=2$	**2p**
b)	$\mathcal{A}=\int_{-1}^1\lvert f(x)\rvert dx=\int_{-1}^0 -xe^{-x}dx+\int_0^1 xe^{-x}dx=\left.(x+1)e^{-x}\right\vert_{-1}^0-\left.(x+1)e^{-x}\right\vert_0^1=$	**3p**
	$=1-\frac{2}{e}+1=2-\frac{2}{e}$	**2p**
c)	$(n+2)I_n=(n+2)\int_0^1 x^n f(x)\,dx=(n+2)\int_0^1 x^{n+1}e^{-x}dx=\int_0^1\left(x^{n+2}\right)'e^{-x}dx=\frac{1}{e}+\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx$	**2p**
	$0\le x\le 1\Rightarrow\frac{1}{e}\le e^{-x}\le 1\Rightarrow\frac{1}{e}\cdot x^{n+2}\le x^{n+2}e^{-x}\le x^{n+2}\Rightarrow\frac{1}{e}\int_0^1 x^{n+2}dx\le\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx\le\int_0^1 x^{n+2}dx$	**1p**
	Cum $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{n+2}dx=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1}{n+3}=0$, obținem $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^1 x^{n+2}e^{-x}dx=0\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}(n+2)I_n=\frac{1}{e}$	**2p**